МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»

Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Теличко Г.Н.
профессор

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине
ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Направление подготовки: *270800.62 «Строительство»*
Профиль подготовки: *«Промышленное и гражданское строительство»*

Степень выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Тула 2012 г.

Рассмотрено на заседании кафедры

протокол № __ от «_____» _____ _____ 20____г.

Зав. кафедрой _____ А.А. Трещёв

Содержание

Раздел 1. Исследование устойчивости плоских расчётных схем
1.1. Методы исследования устойчивости стержневых систем
1.1.1. Понятие о неоднозначности формы равновесия сооружения
1.1.2. С
1.1.3. татический метод
1.1.4. Энергетический метод
1.1.5. Динамический метод
1.2. Оценка устойчивости методом эквивалентного стержня
1.2.1. Потеря устойчивости по Эйлеру
1.2.2. Обобщённая формула Эйлера для критической силы сжатия стержня
1.2.3. Оценка критической силы сжатия стержня при упругом опирании
1.3. Исследование устойчивости методом перемещений
1.3.1. Уравнение продольного изгиба сжатого стержня
1.3.2. Решение уравнения продольного изгиба в форме метода начальных параметров
1.3.3. Определение критической узловой нагрузки в рамах методом перемещений
1.3.4. Табличные эпюры метода перемещений для сжато-изогнутого стержня
1.4. Учёт влияния поперечных сил на значение критической нагрузки
1.4.1. Устойчивость стержней сплошного сечения
1.4.2. Устойчивость стержней сквозного сечения
1.5. Устойчивость стержней переменного сечения
1.6. Решение задачи устойчивости на ЭВМ
Раздел 2. Исследование колебаний плоских расчётных схем
2.1. Методы исследования движения расчётных схем
2.1.1. Понятие о динамической модели сооружения
2.1.2. Кинетостатический метод
2.1.3. Кинематический метод
2.1.4 Энергетический метод
2.2. Динамические модели расчётных схем с сосредоточенными и распределёнными массами
2.2.1. Модель сооружения с конечным числом динамических степеней свободы
2.2.2. Способы моделирования массы сооружения конечным числом динамических степеней свободы
2.2.3. Модель сооружения с бесконечным числом динамических степеней свободы
2.3. Свободные колебания расчётных схем с сосредоточенными массами
2.3.1. Уравнения колебаний системы с конечным числом динамических степеней свободы
2.3.2. Определитель частот свободных колебаний
2.3.3. Формы собственных колебаний
2.4. Вынужденные колебания расчётных схем с сосредоточенными массами
2.4.1. Понятие о неустановившихся вынужденных колебаниях
2.4.2. Решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях
2.4.3. Понятие о коэффициенте динамического усиления действия нагрузки
2.5. Учёт влияния сопротивления на характеристики колебательного процесса
2.5.1. Характеристики сопротивления строительных материалов и конструкций
2.5.2. Амплитудно-частотная характеристика колебаний при наличии сопротивления
2.6. Колебания стержневых систем с распределённой массой
2.6.1. Уравнение колебаний балки с распределённой массой
2.6.2. Балочные функции решения
2.6.3. Исследование колебаний методом перемещений
2.7. Решение задачи вынужденных колебаний на ЭВМ

ЛЕКЦИЯ 1

Важность этих разделов строительной механики определяется тем, что недоучёт динамических явлений и потери устойчивости деформированных элементов строительных сооружений приводит к серьёзным последствиям. Именно об этом свидетельствую те аварии инженерных сооружений, от которых написано немало книг под обобщённым названием "Аварии конструкций".

1. Исследование устойчивости плоских расчётных схем

Основы теории устойчивости форм равновесия деформируемых систем заложены Леонардом Эйлером в середине XVIII столетия. В дальнейшем эти теория получила большое развитие и в настоящее время является одним из важнейших разделов механики деформируемого тела, в частности – в строительной механике.

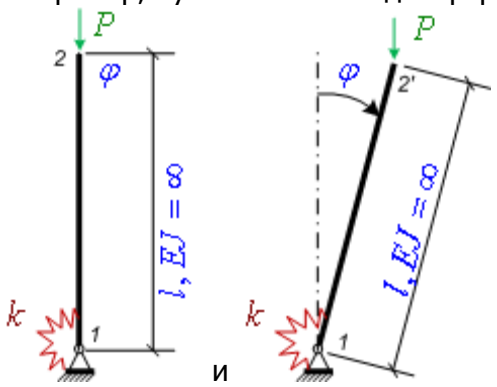
РАЗДЕЛ 1.
ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ РАСЧЁТНЫХ СХЕМ

1.1. Методы исследования устойчивости стержневых систем

1.1.1. Понятие о неоднозначности формы равновесия сооружения

При одних и тех же внешних нагрузках и условиях закрепления упругая система может иметь не одну, а *несколько* форм равновесия.

Например, пусть возможны две формы:



Здесь k – жёсткость упругого шарнира в узле 1.

Составим уравнение равновесия для отклонённого положения стержня:

$$\sum mom_1 = k \cdot \varphi - P \cdot l \cdot \sin\varphi = 0$$

Для удобства анализа преобразуем это уравнение к безразмерному виду, выделив параметр нагрузки ν,

$$\varphi = \left(P \cdot \frac{l}{k} \right) \cdot \sin\varphi = \nu \cdot \sin\varphi$$

Полученное уравнение будем анализировать в предположении, что значение параметра $\nu > 0$ (иначе система не имеет нагрузки).

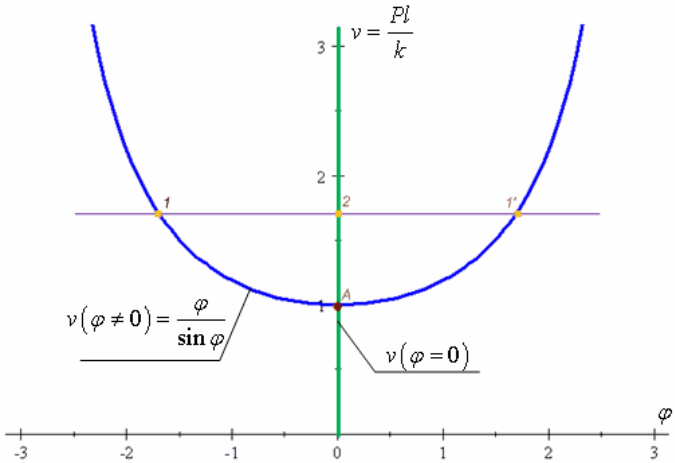
Параметр нагрузки определяется двумя решениями:

1. Если $\varphi \neq 0$, то, поделив уравнение на φ, получим

$$\nu = \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

2. Если $\varphi = 0$, то делить на φ нельзя и значение параметра ν неопределено, так при любом его значение уравнение удовлетворяется за счёт нулевого значения угла.

Полученный результат можно проиллюстрировать следующим графиком



Таким образом, в точке А решение уравнения начинает "ветвиться":

- одна ветвь (на ней лежит точка 2) соответствует неотклонённому положению стержня при $\varphi = 0$ и $\nu > 0$;

- вторая ветвь (на ней лежат точки 1 и 1') соответствует отклонённым положениям стержня на угол $\pm\varphi \neq 0$, причём каждому значению параметра нагрузки соответствуют некоторое значения угла отклонения (знак угла остаётся неопределённым!).

Заметим, что ветвление начинается со значения $\nu = 1$. Соотвествующее значение $P_{кр} = k/l$ называется "критическим значением" нагрузки.

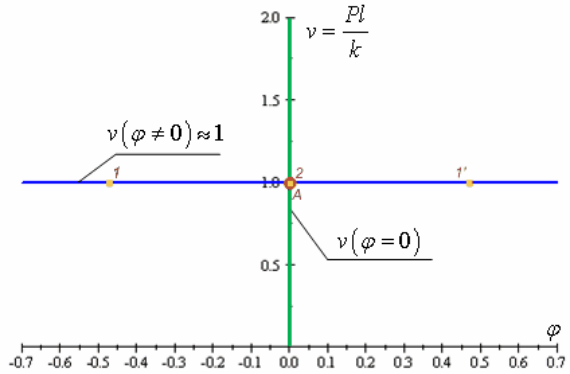
До достижения критического значения нагрузки форма равновесия остаётся единственной (без отклонения от вертикали).

Обратите внимание! Значения угла отклонения в данном примере ничем не ограничены. Если же принять угол отклонения *малым* настолько, что синус угла и сам угол равны по значению, то вторая ветвь вырождается в прямую $\nu = 1$. В этом случае неопределённым остаётся не только знак угла отклонения, но и значение этого малого угла. Что следует из уравнения равновесия для состояния с малым углом отклонения.

$$\sum mom_1 \approx k \cdot \varphi - P \cdot l \cdot \varphi = 0$$

$$\varphi \cdot (k - P \cdot l) = k \cdot \varphi \cdot (1 - \nu) = 0$$

$$\nu = \begin{cases} \text{произвольное, если } \varphi = 0 \\ 1, \text{ если } \varphi \neq 0 \end{cases}$$

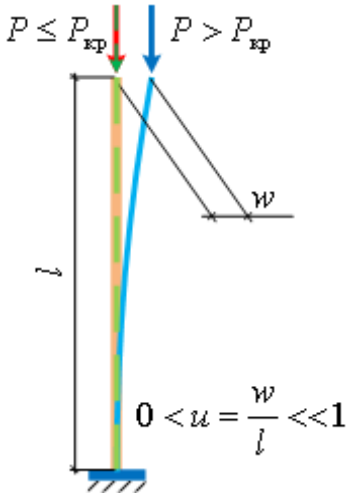


Устойчивость характеризуется как способность упругой системы сохранять определённую форму равновесия под действием заданной нагрузки.

Однако утрата такой способности в зависимости от свойств системы может выражаться по-разному, и **под потерей устойчивости** подразумевают несколько совершенно различных явлений.

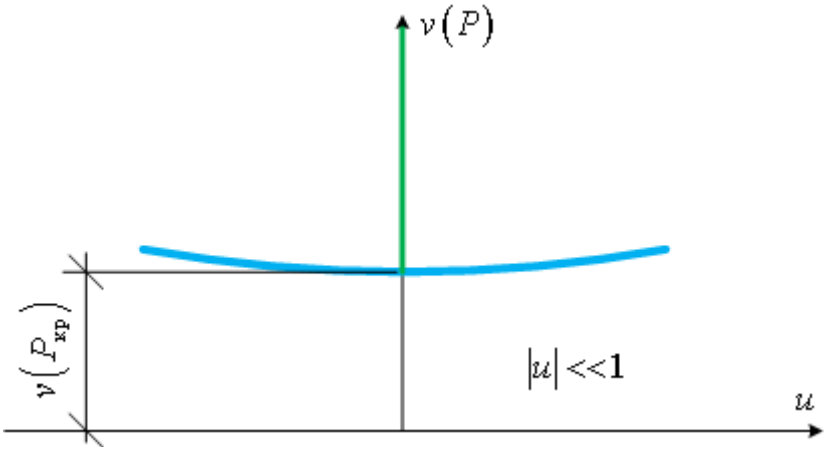
Основы теории устойчивости форм равновесия упругих систем были заложены Эйлером более 200 лет назад. Согласно концепции Эйлера признаком неустойчивости формы равновесия служит существование **смежной** (т.е. сколько угодно близкой к исходной) отклонённой формы равновесия при неизменной нагрузке. При этом неявно принимается гипотеза о том, что эта новая форма является устойчивой, а исходная – неустойчивой. Такая постановка задачи предполагает, что потеря устой-

чивости выражается в переходе системы к смежной форме равновесия, причём для этого перехода достаточно любого ничтожно малого возмущения исходной формы равновесия.



В упругих стержневых системах смежное состояние характеризуется появление малых деформаций изгиба (малых поперечных перемещений на фоне осевого сжатия стержней).

Возвращаясь к примеру об устойчивости рассмотренной расчётной схемы, сформулированную точку зрения можно пояснить следующим обобщающим графиком:



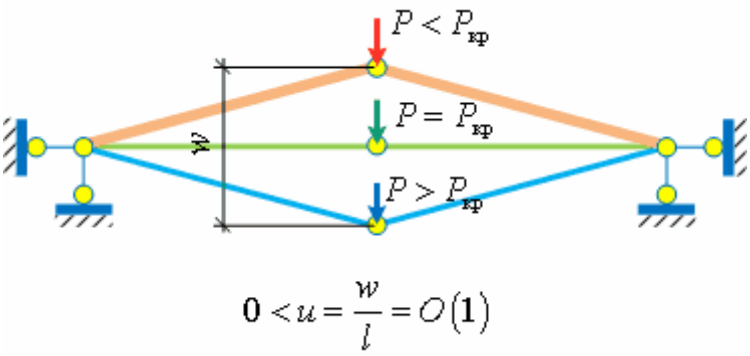
Здесь аргументом является относительное *малое* (смежное) перемещение (линейное или угловое), которое характеризует отклонённое состояние, а ординатой – безразмерный параметр, зависящий от нагрузки. Точка ветвления форм равновесия на этом графике соответствует координатам (0, $v(P_{кр})$). В соответствии с подходом Эйлера устойчивой является смежная форма (представлена множеством точек ($|u|>0, v(P)>v(P_{кр})$), а неустойчивой – исходная (представлена множеством точке ($u=0, v(P)\ge v(P_{кр})$).

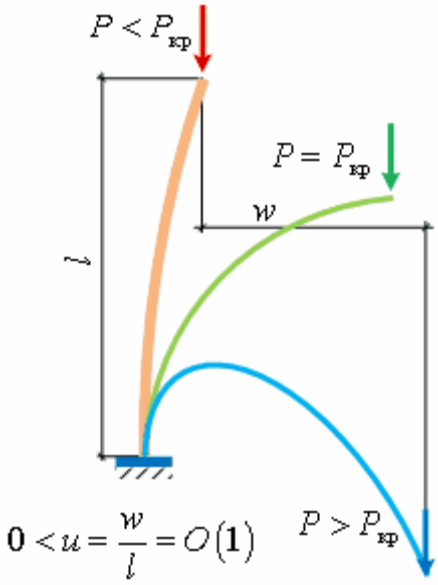
Обратите внимание! Такая интерпретация характера форм равновесия имеет место только, если нагрузка не меньше $P_{кр}$критическую. Для $P<P_{кр}$ исходная форма равновесия является устойчивой.

Таким образом, потеря устойчивости по Эйлеру может быть охарактеризована, как потеря устойчивости переходом к устойчивому состоянию равновесия при малых относительных перемещениях.

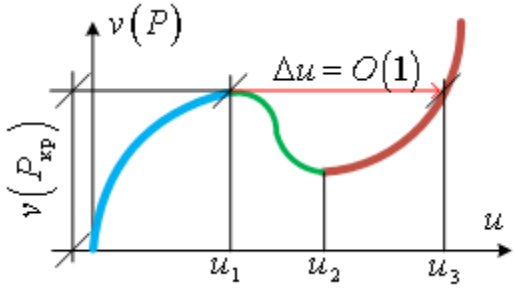
В рамках подхода Эйлера удалось решить множество практически важных задач строительной механики. Однако в последствии выяснилось, что в ряде случаев потеря устойчивости выражается не в переходе к смежным формам равновесия, а по-иному. Такие переходы можно разделить на три случая, которые удобно представить соответствующими графиками.

1. Потеря устойчивости переходом в устойчивое состояние равновесия при больших относительных перемещениях.



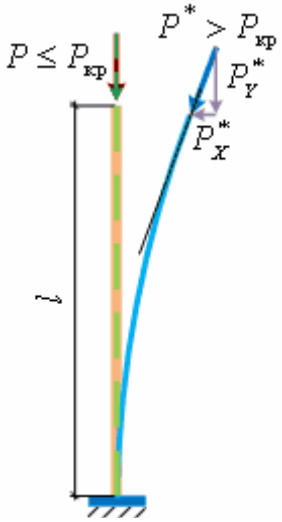


В этом случае достижение нагрузки критического значения приводит к появлению *больших* относительных перемещений, так что новая форма не является смежной. Причём переход к этой форме осуществляется мгновенным перемещением ("**перескоком**").



Неустойчивые формы равновесия в этом случае определяются интервалом нагрузок, соответствующих интервалу перемещений $u_1 \le u \le u_2$. А устойчивые формы представлены двумя интервалами, которые определяют интервалы перемещений $0<u<u_1$ и $u>u_2$ соответственно.

2. Потеря устойчивости переходом от состояния покоя к состоянию движения при наличии множества неустойчивых форм равновесия.

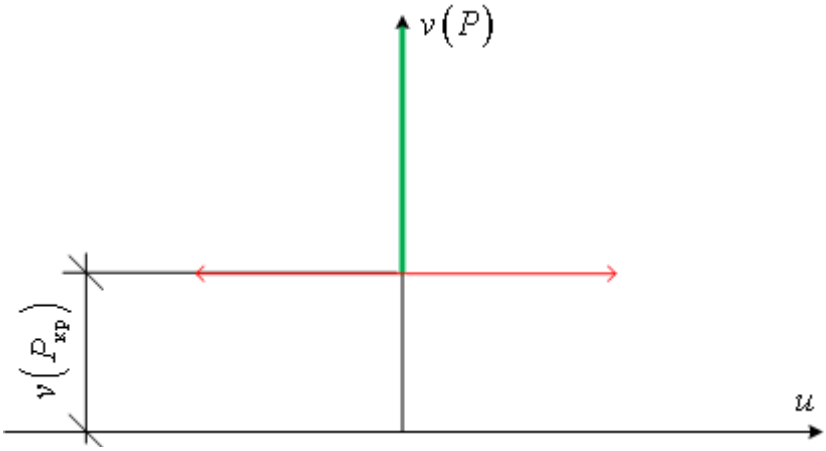


Особенность этой расчётной схемы заключается в том, что сжимающая нагрузки оказывается "**следящей**" за поворотом сечения, в котором она приложена.

Следует обратить внимание на то, что отклонённом состоянии появляется "возвращающая" составляющая нагружающей силы P^*_X. Эта сила стремится уменьшить возникающий прогиб стержня.

Анализ соответствующего уравнения равновесия показывает, что значение этой составляющей в состоянии равновесия равно нулю! Т.е. не существует форм равновесия с $P^*_X \neq 0$. А это, в свою оче-

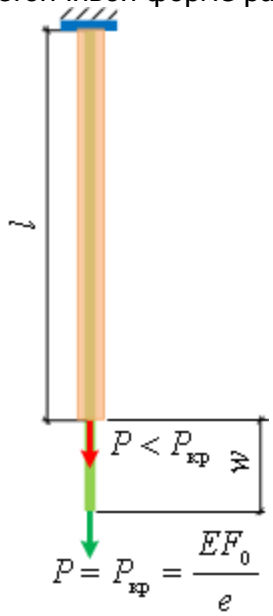
редь, означает, что и формы равновесия в виде изгиба, вызванные следящей сжимающей силой, не существуют.



Превышение значения критической нагрузки для соответствующих систем приводит к движению системы за счёт возвращающей силы P^*_X, так что все состояния при $v(P)>v(P_{кр})$ не являются состояниями равновесия. Устойчивые же состояния равновесия определяются нагрузками, меньше критических. Таким образом, неустойчивые состояния равновесия представлены множеством точек (0, $v \geq v(P_{кр})$).

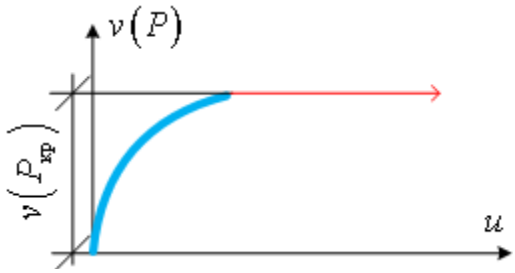
Подобные системы не могут быть исследованы на базе уравнений равновесия и требуют рассмотрения неустойчивого состояния в форме движения, т.е. требуют применения методов исследования динамического поведения систем.

3. Потеря устойчивости переходом от состояния покоя с состоянию движения при единственной неустойчивой форме равновесия



В качестве примера рассматривается растягиваемый упругий стержень с изменяемой, в соответствии с законом Пуассона, площадью поперечного сечения.

Анализ уравнения равновесия растянутого стержня показывает, что при нагружении стержня нагрузкой, превышающей значение $P_{кр}= EF_0/e$, перемещения неограниченно увеличиваются (здесь e=2.718 – основание натурального логарифма).

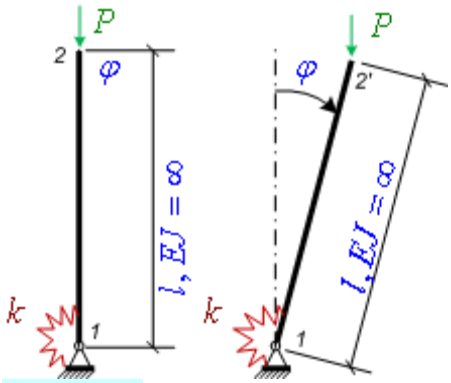


Таким образом, неустойчивые формы равновесия представлены всего одним состоянием – точкой (0, $v(P_{кр})$). Устойчивой же является формы, которые представлены множеством точек (u=0, $v<v(P_{кр})$).

В дальнейшем будет рассматриваться только потеря устойчивости по Эйлеру, т.е. потеря устойчивости переходом в смежное состояние равновесия.

1.1.2. Статический метод

До сих пор при рассмотрении неоднозначности форм равновесия мы пользовались результатами подхода Эйлера, основанного на записи уравнения равновесия упругой системы в смежном состоянии. Этот подход носит название **статического метода** или метода Эйлера. Согласно этому методу критическая нагрузка – это минимальная нагрузка, при которой возможно существование смежной формы равновесия.



Например, исходя из понятия смежного состояния, как состояния в котором угловое перемещение является малой величиной, т.е.

$$\sin\varphi \approx \varphi,$$

уравнение равновесия можно записать из условия

$$\sum mom_1 = -P\cdot(l\cdot\varphi) + k\cdot\varphi = 0.$$

Решение, которое обеспечивает существование смежного состояния равновесия (угол отклонения не должен быть нулевым), даёт уравнения для определения критической силы:

$$P = \frac{k}{l}.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\min P = P_{кр} = \frac{k}{l}.$$

1.1.3. Энергетический метод

Дж. Брайяном и С.П. Тимошенко был предложен другой подход, основанный на понятиях потенциальной энергии консервативной упругой системы. В консервативных системах приращение потенциальной энергии при переходе из одного состояния в другое не зависит от пути перехода, а определяется только характеристиками начального и конечного состояний. Вычисляя приращение потенциальной энергии при переходе в смежное состояние через работу внутренних и внешних сил, действующих в упругой системе, приравнивают её значение к нулю. Тем самым, как бы уравнивая исходное и смежное состояния по запасу потенциальной энергии. Из этого условия и определяется критическая нагрузка как минимальная из всех возможных значений. Такой подход получил название **энергетического метода**.

Например, для той же самой задачи потенциальная энергия перехода в смежное состояние определяется через работу внешних и внутренних сил соотношениями

$$\Delta U = \Delta U(P) - \Delta U(k)$$

$$\Delta U(P) = -P\cdot(l - l\cdot\cos\varphi) \approx -P\cdot l\cdot\frac{1}{2}\varphi^2$$

$$\Delta U(k) = -\left[-\frac{1}{2}k\cdot\varphi^2\right]$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\cdot\varphi^2 - P\cdot l\cdot\frac{1}{2}\varphi^2 = 0$$

$$\min P = P_{кр} = \frac{k}{l}$$

При вычисление работы внешних сил было учтена малость угла отклонения.

Наш соотечественник А.М. Ляпунов сформулировал теорему, которая позволяет исследовать потерю устойчивости как консервативных, так и неконсервативных систем. Согласно этой теореме, вовлечённая в колебательный процесс система с устойчивой формой равновесия будет совершать колебания, частота которых стремится к нулевому значению. Таким образом, в рамках этого подхода, который получил название **динамического метода**, критическая нагрузка, если она существует, определяется как минимальная, полученная из условия равенства нулю частоты собственных колебаний системы.

Например, для составления уравнения движения заданной расчётной схемы соберём всю массу системы на свободном конце стержня и воспользуемся принципом Даламбера, согласно которому учет сил инерции позволяет рассматривать массу в равновесии в любой момент времени. Составим сумму моментов относительно точки 1 с учётом наличия силы инерции, действующей на массу:

$$m\cdot\frac{d^2}{dt^2}(l\cdot\varphi)\cdot l + k\cdot\varphi - P\cdot l\cdot\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2\varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{k - Pl}{ml^2}$$

$$\omega^2 = 0 \Rightarrow \min P = P_{кр} = \frac{k}{l}$$

Следует обратить внимание, что знаменатель в выражении частоты собственных колебаний не может быть равен нулю, а потому деление на него возможно.

ЛЕКЦИЯ 2

1.2. Исследование устойчивости методом эквивалентного стержня

1.2.1. Потеря устойчивости по Эйлеру

Это альтернативная форма равновесия, которая сопровождается бесконечно малыми поперечными перемещения оси стержня. Такая форма называется также *смежной* формой равновесия.

1.2.2. Обобщённая формула Эейлера

Это формула, которую Леонард Эйлер получил, исследуя смежную форму равновесия для шарнирно опёртого сжатого стержня, обобщённая на другие случая закрепления.

$$P_{кр}^{Эйлера} = \left(\frac{\pi}{\mu l}\right)^2 EJ = \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 EJ = k^2 EJ$$

$\mu = \frac{l_0}{l}$ – коэффициент свободной длины: отношение длины полуволны потери у

$\nu = \frac{\pi}{\mu} = l\sqrt{\frac{P}{EJ}} = kl$ – безразмерный параметр нагрузки (масштаб нагрузки)

$k = \frac{\nu}{l} = \frac{\pi}{\mu l} = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ – интенсивность безразмерной *погонной* нагрузки

Связь значения этого коэффициента с формой кривой при потере устойчивости определены для стандартных форм кривых потери устойчивости при различных случаях закрепления жёсткими связями:

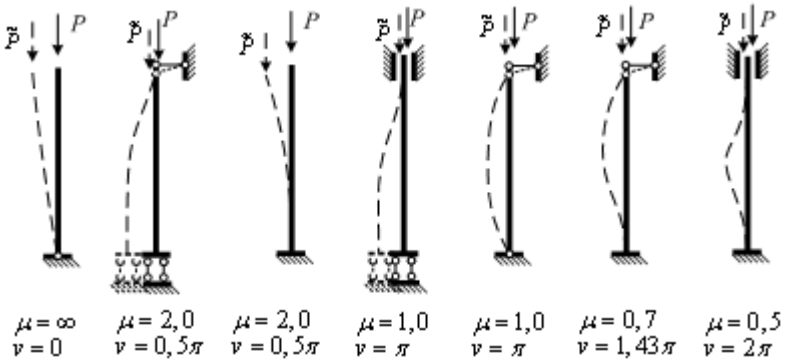


Рис. 1. Смежные формы равновесия в однопролетных стержнях при $P_{кр}$

1.2.3. Оценка критической силы сжатия стержня при упругом опирании

Наличие этих данных позволяет установить оценку значения критической в случае упругого закрепления сжатого стержня в составе плоской рамы. **Алгоритм построения** такой оценки включает следующие шаги:

1. Определяется узел стержня, который опёрт упруго по углу поворота (жесткий узел рамы) или по поперечному перемещению (наличие стержня, параллельного данному, поперечная сила с которого передаётся на данный стержень).

2. В отношении упругой связи (по углу поворота или поперечному перемещению) принимается гипотеза о том, что связь обладает **нулевой жёсткостью** (т.е. вообще отсутствует). И для этого случая опирания стержня определяется значение критической силы по данным рис. 1 – это будет значением левой границы оценки критической силы.

3. В отношении упругой связи принимается гипотеза о том, что связь обладает **абсолютной жёсткостью**. И для этого случая опирания стержня определяется значение критической силы по данным рис. 1 – это будет значением правой границы оценки критической силы.

4. С учётом того, что реальное значение жесткости упругой связи бесконечно велико по сравнению с нулевой жёсткостью, делается вывод о том, что истинное значение критической силы находится **ближе к правой границе**, но меньше него и во всяком случае больше среднего значения, определяемого по значениям левой и правой границ.

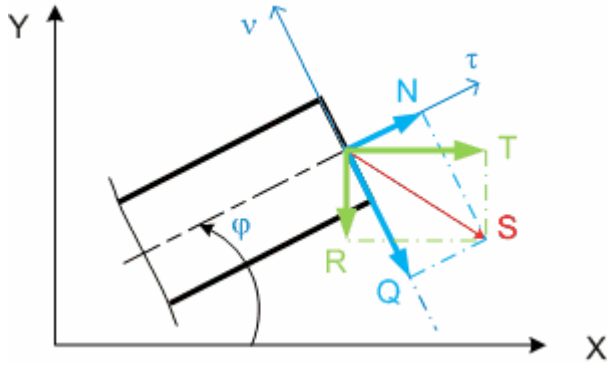
Для смежных форм равновесия с силой сжатия больше критической прогибы определяются на основе решения уравнения продольного изгиба, в котором используется величина, обратная свободной длине - число $n=1/\mu$ полуволн изгиба оси стержня.

ЛЕКЦИЯ 3

1.3. Исследование устойчивости методом перемещений

1.3.1. Уравнение продольного изгиба сжатого стержня

Для дальнейших рассуждений полезно вектор внутренних сил S уметь раскладывать не только на пару (Q, N), но и на пару (R, T) – по **Н.В. Корноухову.**



Здесь T – "**осевая**" сила (направлена по оси X стержня), а R – "**перерезывающая**" сила (направлена по оси Y).

$$\vec{S} = \vec{N} + \vec{Q} = \vec{T} + \vec{R}$$

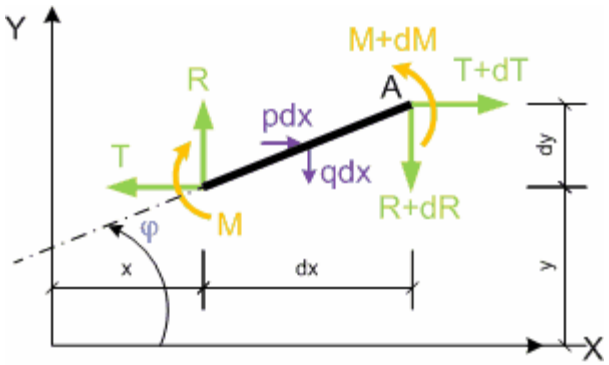
$$N = T\cos\varphi - R\sin\varphi \approx T - R\varphi;$$

$$Q = T\sin\varphi + R\cos\varphi \approx R + T\varphi.$$

$$R = Q - T\varphi = Q + Py^{I}(x),$$

$$T = N + R\varphi.$$

Рассмотрим равновесие элемента dx оси стержня в смежном состоянии деформированного равновесия.



Составим условия равновесия элемента dx на плоскости (X, Y):

$$\sum X = -T + pdx + T + dT = 0;$$

$$\frac{dT}{dx} = -p; \text{ при } p = 0 \;\; T = const.$$

Оказывается, при отсутствии распределённой нагрузки p (вдоль оси стержня) осевая сила T является **постоянной** и равной по величине, но противоположной по направлению, сжимающей силе P.

$$\sum Y = R - qdx - R - dR = 0;$$

$$\frac{dR}{dx} = -q; \text{ при } q = 0 \;\; R = const.$$

Если отсутствует распределённая вдоль оси Y нагрузка q, то перерезывающая сила R вдоль оси стержня также **не меняется**.

$$\sum M_A = -M - Tdy - Rdx + pdx \cdot \frac{dy}{2} + qdx \cdot \frac{dx}{2} + M + dM = 0;$$

$$\frac{dM}{dx} - T\frac{dy}{dx} - R = 0; \text{ точностью до малых 2-го порядка; } \Rightarrow$$

$$R = \frac{dM}{dx} - T\frac{dy}{dx}; \Rightarrow \frac{dR}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(T\frac{dy}{dx}\right) = -q.$$

Это уравнение называется уравнением **продольного изгиба**.

Рассмотрим ряд упрощающих вид уравнения предположений:

При $q = 0$ $R = const$ имеем упрощение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

При $EJ = const$ ещё одно упрощение:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Приведём уравнение к каноническому виду и дважды проинтегрируем, чтобы понизить его порядок:

$$k^2 = \frac{P}{EJ},\ EJ \neq 0 \Rightarrow y(x)^{IV} + k^2 y(x)^{II} = 0.$$

$$\int_x \left[y(x)^{IV} + k^2 y(x)^{II} \right] dx = \int_x 0 dx \Rightarrow$$

$$y(x)^{III} + k^2 y(x)^{I} = \mathrm{const}_1;$$

$$\int_x \left[y(x)^{III} + k^2 y(x)^{I} \right] = \int_x \mathrm{const}_1 dx \Rightarrow$$

$$y(x)^{II} + k^2 y(x) = \mathrm{const}_2 + \mathrm{const}_1 \cdot x;$$

Получили обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение со **специальной** правой частью.

1.3.2. Решение уравнения продольного изгиба в форме метода начальных параметров

Решение подобных уравнений состоит из двух решений: общего решения $\mathbf{y}_0$ однородного уравнения и частного решения $\mathbf{y}^*$ неоднородного уравнения.

Частное решение ищем в виде выражения правой части, но с неопределёнными константами А и В.

$$y(x) = y_o(x) + y^*(x);$$

$$y^*(x) = A + Bx \Rightarrow$$

$$(A + Bx)^{II} + k^2 (A + Bx) = \mathrm{const}_2 + \mathrm{const}_1 \cdot x \Rightarrow$$

$$k^2 A = \mathrm{const}_2;\ k^2 B = \mathrm{const}_1;$$

Решение общее ищем в форме подстановки Эйлера.

$$y_o(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \left(e^{\lambda x}\right)^{II} + k^2 \left(e^{\lambda x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + k^2\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ik;$$

$$y_o(x) = const_3 \cdot e^{+ikx} + const_4 \cdot e^{-ikx};$$

$$y_o(x) = const_3 \cdot e^{+i(kx)} + const_4 \cdot e^{-i(kx)};$$

$$e^{\pm i(kx)} = \cos(kx) \pm i \sin(kx);\ \text{(формула Эйлера)}$$

$$e^{\pm i(k \cdot 0)} = 1;\ \text{т.к. cos и sin линейно независимы, то}$$

$$y_o(x) = const_3 \cdot \cos(kx) + const_4 \cdot \sin(kx);$$

Таким образом, решение уравнения продольного изгиба имеет вид:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(kx) + C_4 \sin(kx)$$

при условиях:

$$R = const,\ T = const = -P,$$

$$EJ = const;\ k^2 = P / EJ.$$

Краевые условия для дифференциального уравнения 4-го порядка назначаются на концах стержня:

А) формальные

	$x=0$	$x=l$	
$y(x)$			
$y^{I}(x)$			φ
$y^{II}(x)$			M/EJ
$y^{III}(x)$			Q/EJ

Б) учёт связи между перерезывающей и поперечной силами ($R=Q+P\varphi$):

	$x=0$	$x=l$	
$y(x)$			
$y^{I}(x)$			φ
$y^{II}(x)$			M/EJ
$y^{III}(x)+k^2y^{I}(x)$			R/EJ

Решение уравнения продольного изгиба теперь можно представить в форме

$$y(x)=A+Bx+C\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)+C_4\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$$

Использование решения уравнения продольного изгиба

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3\cos(kx)+C_4\sin(kx)$$

требует назначения 4-х краевых условий для определения постоянных интегрирования C_i, i=1…4.

Удовлетворяя краевым условиям в сечениях x=0 и x=l, мы формирует систему 4-х алгебраических уравнений относительно этих 4-х неизвестных. Поскольку краевые условия можно интерпретировать через систему геометрических (прогиб, угол поворота опорных сечений) и статических (изгибающий момент, поперечная или перерезывающая сила в опорных сечениях) характеристик, при жёстком опирании мы может пользоваться нулевыми значениями этих характеристик (ненулевые значения до решения задачи нам неизвестны).

Подобная система уравнений является однородной, так что условием существования ненулевого решения (т.е. решение хотя бы с одной ненулевой постоянной интегрирования) будет нулевое значение определителя этой системы, порядок которого равен 4. Таким образом формулируется дополнительное уравнение, в котором неизвестным будет значение параметра k (или его безрамерного аналога v). Это уравнение называется **уравнением устойчивости**.

Можно понизить порядок определителя до 2-х, если в качестве постоянных интегрирования использовать геометрические и статические характеристики в одной точке – точке **начала** координат, совпадающей с одной из точек опирания. Соответствующие значения характеристик называются **начальными параметрами**.

Если учесть, что в смежном состоянии при тех же условиях закрепления поперечная сила меняется по длине стержня, а перерезывающая сила постоянна, то имеет смысл в качестве начального параметра использовать значение именно перерезывающей силы.

Запишем решения уравнения продольного изгиба в матричной форме (D_X – оператор дифференцирования по x):

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \cos kx & \sin kx \\ D_x(1) & D_x(x) & D_x(\cos kx) & D_x(\sin kx) \\ EJD_{xx}(1) & EJD_{xx}(x) & EJD_{xx}(\cos kx) & EJD_{xx}(\sin kx) \\ EJ\left(\begin{matrix} D_{xxx}(1)+ \\ +k^2D_x(1) \end{matrix}\right) & EJ\left(\begin{matrix} D_{xxx}(x)+ \\ +k^2D_x(x) \end{matrix}\right) & EJ\left(\begin{matrix} D_{xxx}(\cos kx)+ \\ +k^2D_x(\cos kx) \end{matrix}\right) & EJ\left(\begin{matrix} D_{xxx}(\sin kx)+ \\ +k^2D_x(\sin kx) \end{matrix}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Вычислим производные решения:

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \cos kx & \sin kx \\ 0 & 1 & -k\sin kx & k\cos kx \\ 0 & 0 & -EJk^2\cos kx & -EJk^2\sin kx \\ 0 & EJk^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Составим матричное уравнение для определения связи начальных параметров с формальными постоянными интегрирования дифференциального уравнения продольного изгиба:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \varphi(0) \\ M(0) \\ R(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & -Jk^2E & 0 \\ 0 & Jk^2E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Решение этого уравнения относительно C_i имеет вид:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & -EJk^2 & 0 \\ 0 & EJk^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ R_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{EJk^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EJk^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EJk^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & -\frac{1}{EJk^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{1}{EJk^2}M_0 \\ \frac{1}{EJk^2}R_0 \\ -\frac{1}{EJk^2}M_0 \\ \frac{1}{k}\varphi_0 - \frac{1}{EJk^3}R_0 \end{bmatrix}$$

Теперь решение уравнения продольного изгиба можно представить в форме, получившей название **метода начальных параметров**:

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \cos kx & \sin kx \\ 0 & 1 & -k\sin kx & k\cos kx \\ 0 & 0 & -EJk^2\cos kx & -EJk^2\sin kx \\ 0 & EJk^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + \frac{1}{EJk^2}M_0 \\ \frac{1}{EJk^2}R_0 \\ -\frac{1}{EJk^2}M_0 \\ \frac{1}{k}\varphi_0 - \frac{1}{EJk^3}R_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y_0 + (\sin kx)\left(\frac{1}{k}\varphi_0 - \frac{1}{EJk^3}R_0\right) + \frac{1}{EJk^2}M_0 - \frac{1}{EJk^2}M_0\cos kx + \frac{1}{EJk^2}R_0 x \\ k(\cos kx)\left(\frac{1}{k}\varphi_0 - \frac{1}{EJk^3}R_0\right) + \frac{1}{EJk^2}R_0 + \frac{1}{EJk}M_0\sin kx \\ M_0\cos kx - EJk^2(\sin kx)\left(\frac{1}{k}\varphi_0 - \frac{1}{EJk^3}R_0\right) \\ R_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin kx}{k} & \frac{1-\cos kx}{k^2EJ} & \frac{kx-\sin kx}{k^3EJ} \\ 0 & \cos kx & \frac{\sin kx}{kEJ} & \frac{1-\cos kx}{k^2EJ} \\ 0 & -kEJ\sin kx & \cos kx & \frac{\sin kx}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ R_0 \end{bmatrix}$$

Используя некоординатную форму записи матриц, можно упростить это выражение метода начальных параметров:

$$\mathbf{US}(x) = \Phi(x, k, EJ)\,\mathrm{US}_{|x=0}$$

В качестве краевых условий используют:

1) нулевые значения начальных параметров в одной из точек опирания, где значения *максимально возможного числа* этих параметров равны нулю (в этой же точке размещается начало системы координат).

2) нулевые значение перемещений (прогиба и поворота) и усилий (момента и перерезывающей силы) на противоположном конце стержня (для однопролётных бесконкосольных стержней постоянной жёсткости).

Алгоритм решение задачи устойчивости однопролётного стержня:

определение начальных параметров с нулевыми значениями и упрощение функций НДС стержня в смежном состоянии

$$\mathbf{US}(x) = \Phi(x,k,EJ)\cdot \mathrm{US}(0)$$

определение характеристик НДС с нулевыми значения в сечении стержня $x=l$

$$\mathbf{US}(l) = \Phi(l,k,EJ)\cdot \mathrm{US}(0)$$

составление уравнения устойчивости раскрытием определителя устойчивости

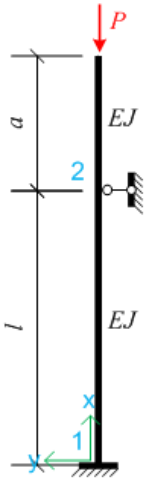
$$\det\left[\Phi(l,k,EJ)\right] = 0$$

решение уравнения устойчивости графическим методом (или с помощью ЭВМ)

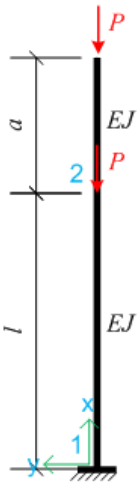
$$P_{\text{кр}} = k_{\min}^2 EJ = \left(\frac{\nu_{\min}}{l}\right)^2 EJ = \left(\frac{\pi}{\mu_{\min} l}\right)^2 EJ$$

Решение уравнения продольного изгиба в форме метода начальных параметров можно использовать для **анализа устойчивости многопролётных стержней** следующих типов:

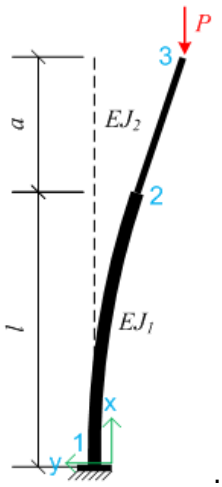
наличие промежуточной шарнирно-подвижной опоры



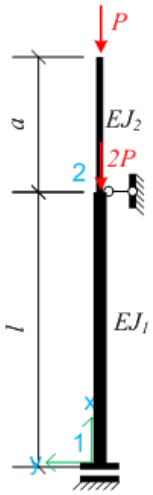
наличие промежуточной сжимающей силы



наличие пролётов различной изгибной жёсткости



комбинация всех перечисленных особенностей



Отметим, что применение приведенной формы метода начальных параметров требует, чтобы каждый пролёт многопролётного стержня находился в тех же условиях, что и ранее рассмотренные однопролётные стержни: в частности, изгибная жёсткость пролёта должна быть постоянна и должны отсутствовать внутрипролётные нагрузки.

Алгоритм применения метода начальных параметров, кроме задания для каждого пролёта собственных краевых условий, включает формулировку условий совместной работы пролётов в следующих вариантах:

из условия совместности перемещений сечений, образующих общий узел:

- равенство поперечных перемещений, если ранее не было использовано их нулевое значение (условие нельзя использовать для промежуточной шарнирно-подвижной опоры);
- равенство углов поворота сечений, образующих общий узел;

из условия равновесия общего узла:

- равенство изгибающих моментов в сечениях, образующих общей узел;
- равенство перерезывающих сил в сечениях, образующих общей узел (условие нельзя использовать, если реакция в промежуточной опоре неизвестна или нулевые значения перерезывающий силы в пролетах былы использованы в качестве начальных параметров).

Другой особенностью алгоритма является необходимость "стыковки" систем координат, привязанных к начальным узлам пролётов: например, начало координат второго пролёта может находиться на одном конце 2-х пролётного стержня, а начало координат первого пролёта – на другом конце. В простейшем случае может быть эффективным следующий приём:

1) Решают задачу об определении параметров на конце первого участка, которые определяются с точностью до *неизвестных* начальных параметров этого участка

$$\mathbf{US}_{|x_1=l_1} = \Phi\left(l_1, k_1, EJ_1\right)\mathrm{US}_{|x_1=0}$$

2) Пользуясь условиями совместности работы участков, назначают значения начальных параметров второго участка

$$\mathbf{US}_{|x_2=0} = \Phi\left(l_1, k_1, EJ_1\right)\mathrm{US}_{|x_1=0}$$

3) Удовлетворяя условиям в конце второго участка, строят определитель устойчивости

$$\mathbf{US}_{|x_2=l_2} = \Phi\left(l_2, k_2, EJ_2\right)\cdot \mathrm{US}_{|x_2=0} =$$

$$= \Phi\left(l_2, k_2, EJ_2\right)\cdot \Phi\left(l_1, k_1, EJ_1\right)\cdot \mathrm{US}_{|x_1=0} = \emptyset$$

$$\det\left[\Phi\left(l_2, k_2, EJ_2\right)\cdot \Phi\left(l_1, k_1, EJ_1\right)\right] = 0$$

4) решают уравнение устойчивости графическим методом (или с помощью ЭВМ)

$$P_{\text{кр}} = k_{\min}^2 EJ = \left(\frac{\nu_{\min}}{l}\right)^2 EJ = \left(\frac{\pi}{\mu_{\min} l}\right)^2 EJ$$

Выражения, которые используются в шагах 1-4, являются неполными в сравнении с базовым выражением метода начальных параметров: нулевые значения начальных параметров на каждом участке "вычёркивают" из матриц **Ф** соответствующие столбцы, а из матриц начальных параметров – соответствующие строки.

1.3.3. Определение критической узловой нагрузки в рамах методом перемещений

Наличие выражений геометрических и статических характеристик **US**(x) позволяет решить **задачу о создании таблицы метода перемещений для сжато-изогнутых стержней**.

Алгоритм решения подобной задачи основан на следующих особенностях:

1) Решение задачи о прогибах однопролётной двухопорной балки определено с точностью до значений двух неизвестных начальных параметров.

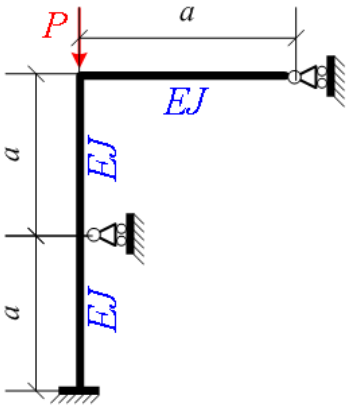
2) Наличие единичного значения одного из начальных параметров (единичное нагружающее перемещение) позволяет сформировать систему 2-х уравнения с 2-мя неизвестными, однако теперь эта система будет *неоднородной.* Это обстоятельство даёт возможность решать вопрос об определении ненулевых неизвестных значений начальных параметров, так как определитель этой системы не равен нулю.

Обратите внимание! Определитель системы уравнения для определения начальных параметров является уравнением устойчивости, т.е. равен нулю, тогда и только тогда, если поперечные и/или угловые перемещения, назначенные в качестве ненулевых начальных параметров и характеризующие смежную форму равновесия, могут осуществляться в расчётной схеме по направлениям связей, *отсутствующих* в опорных сечениях: поворот сечения при переходе в смежное состояние происходит в шарнирном опорном узле, поперечное перемещение – в соответствующем ползуне или на свободном конце.

Сформулированная же задача о построении таблицы метода перемещений предполагает, что единичное перемещение опорного узла балки происходит по направлению *существующей* связи, что возможно только при её фактическом отсутствии, т.е., если эта связь остаётся на месте, то нагрузить балку перемещением невозможно. Таким образом, при осуществлённом единичном перемещении определитель системы уравнений для определения начальных параметров, среди которых один имеет единичное значение по направлению существующей в опорном узле связи, не может быть равен нулю.

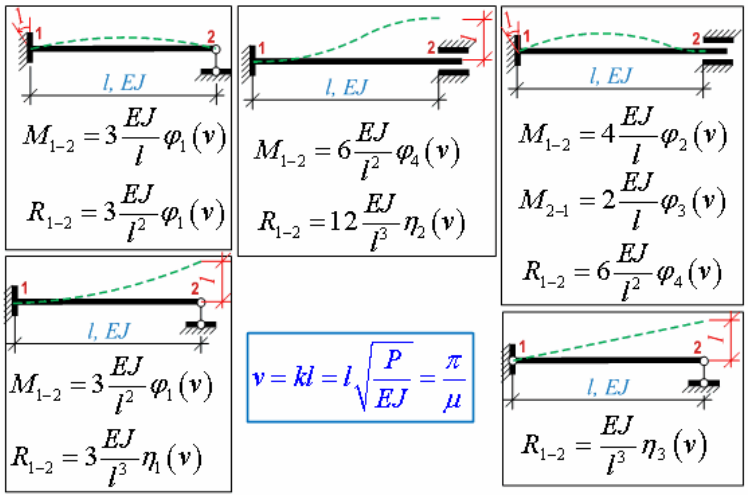
3) Имея значения начальных параметров, мы получаем выражения для всех функций **US**(x), в том числе и в концевых сечениях стержня. Т.о. построение табличных эпюр метода перемещений для сжато-изогнутых стержней становится задачей о построении графика по известному аналитическому выражению.

Наличие подобных эпюр даёт возможность решать задачи устойчивости рам методом перемещений при условии, что нагрузка в виде сосредоченных сил приложена в узлах расчётной схемы. Такой задачей, например, является задача о нагружении стойки ломаного бруса сжимающей силой, приложенной к узлу перехода ригеля в стойку.



1.3.4. Табличные эпюры метода перемещений для сжато-изогнутого стержня

Элементы таблицы метода перемещений для сжато-изогнутых стержней приведены ниже.



Выражения для функций в приведенной таблице имеют вид:

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{3}\cdot\frac{v^2\tan v}{\tan v - v}; \qquad \varphi_2(v) = \frac{1}{4}\cdot\frac{v}{2\tan v}\cdot\frac{\tan v - v}{\tan\frac{v}{2} - \frac{v}{2}};$$

$$\varphi_3(v) = \frac{1}{2}\cdot\frac{v}{2\sin v}\cdot\frac{v - \sin v}{\tan\frac{v}{2} - \frac{v}{2}}; \qquad \varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right);$$

$$\eta_1(v) = \frac{1}{3}\cdot\frac{v^3}{\tan v - v}; \qquad \eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right); \quad \eta_3(v) = v^2.$$

Обратите внимание! Коэффициенты при функциях в таблице в точности равны соответствующим значениям, приведенным в таблице метода перемещений для изогнутых стержней в статически неопределимых системах при отсутствии осевых усилий сжатия!

Алгоритм применения метода перемещений при анализе устойчивости рам с узловой нагрузкой имеет следующие особенности:

1. В связи с тем, что нагрузки приложены только в узлах и являются осевыми, свободные члены канонической системы уравнений равны нулю.

2. В этом случае КСУ метода перемещений имеет отличное от нуля решение при условии, что её определитель равен нулю. Это дополнительное уравнение называется уравнением устойчивости.

3. Уравнение устойчивости является нелинейным трансцендентным уравнением, что следует из выражений функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней. Решение такого уравнения следует проводить численным методом, определяя при этом *минимальное* значение безразмерного параметра нагрузки v.

4. В связи с неоднозначностью решения КСУ рекомендуется использовать для определения минимального корня соответствующее программное обеспечение для персональных ЭВМ.

5. Критическое значение нагрузки определяется из соотношения между v и P.

6. Поскольку при определителе системы уравнений, равном нулю, число независимых уравнений на единицу меньше числа неизвестных, определение перемещений Z_i в смежном состоянии не представляется возможным. Но можно определить относительные значения этих перемещений, взяв в качестве единицы измерения, например, перемещение с максимальным номером. Таким образом, относительное значение перемещения с максимальным номером будет равно единице. Наличие относительных перемещений позволяет строить форму потери устойчивости рамы, а по ней – проводить оценку критической силы с целью контроля полученного решения на ЭВМ.

ЛЕКЦИЯ 4

1.4. Энергетический методв

Метод начальных параметров является точным в пределах тех гипотез, которые он использует: в пределах каждого участка балки изгибная жёсткость и сжимающее усилие постоянны. Если же эти условия не выполняются, то дифференциальное уравнение продольного изгиба имеет переменные коэффициенты и записать его решение в аналитическом виде, как правило, не удаётся. В этих случаях эффективным оказывается применение энергетического метода, который является более общим методом исследования устойчивости, чем статический метод.

Энергетический метод исследования устойчивости форм равновесия упругих систем основан на анализе изменения потенциальной энергии системы при её отклонении от заданной формы равновесия.

ЭНЕРГИЯ (от греч. energeia - действие, деятельность), общая количеств, мера движения и взаимодействия всех видов материи. Э. в природе не возникает из ничего и не исчезает; она только может переходить из одной формы в другую (см. Энергии сохранения закон). Понятие Э. связывает воедино все явления природы.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ, часть общей механич. энергии системы, зависящая от взаимного расположения частиц, составляющих эту систему, и от их положений во внешнем силовом поле (напр., гравитационном). Численно П. э. системы в данном её положении равна работе, к-рую произведут действующие на систему силы при перемещении системы из этого положения в то, где П. э. условно принимается равной нулю (U =0). Из определения следует, что понятие П. э. имеет место только для **консервативных** систем, т. е. систем, у к-рых работа действующих сил зависит только от начального и конечного положения системы.

РАБОТА силы, мера действия силы, зависящая от численной величины и направления силы и от перемещения точки её приложения. Если сила F численно и по направлению постоянна, а перемещение M_0M_1 прямолинейно , то работа·A = F·s·cosα, где s = M_0M_1 , α - угол между направлениями силы и перемещения. Когда α < 90°, работа силы положительна, при 90°<α≤180° – отрицательна, а когда α = 90°, т. е. когда сила перпендикулярна перемещению, A = 0.

Таким образом, потенциальная энергия U консервативной упругой системы может быть определена через сумму работ внешних T и внутренних W сил :

$$U = -(T + W)$$

.

В положении равновесия полная потенциальная энергия консервативной механический системы имеет *стационарное* (экстремальное) значение, причём, согласно **теореме Лагранжа**, положение равновесия устойчиво, если это значение соответствует *минимуму* полной потенциальной энергии.

В соответствии с энергетическим методом подсчитаем изменение потенциальной энергии при переходе к *смежному* состоянию для дифференциально малого элемента dx изогнутого стержня:

работа внешней сжимающей силы (считаем её постоянной по длине) на участке dx, который при повороте обеспечивает "опускание" сжимающей силы и, тем самым, даёт ей возможность совершить *положительную* работу

$$d(\Delta T) = P\Delta(dx) = P[dx - dx \cdot \cos\varphi(x)] \approx$$
$$\approx P\left[dx\left(1 - (1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi 4}{4!}\right)\right] \approx P\left(\frac{\varphi^2}{2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}P[y^I(x)]^2 dx$$

Т.о., полная работа на длина стержня составит

$$\Delta T = \int_0^l d(\Delta T) = \frac{1}{2} P \int_0^l [y^I(x)]^2 dx$$

работа изгибающего момента на участке dx отрицательная (внутренние силы препятствуют возникающим деформациям и зависят от них):

$$d(\Delta W) = -\frac{1}{2} M(x) d\varphi = -\frac{1}{2} EJ(x) y^{II}(x) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2} EJ(x) y^{II}(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = -\frac{1}{2} EJ(x) [y^{II}(x)]^2 dx$$

Т.о., полная работа изгибающего момента на длине стержня

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) [y^{II}(x)]^2 dx$$

Итак, изменение потенциальной энергии может быть вычислено с помощью выражения:

$$\Delta U = -(\Delta T + \Delta W) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) [y^{II}(x)]^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l [y^I(x)]^2 dx$$

Если располагать зависимостью изменения жесткости по длине стержня $EJ(x)$ и формой равновесия $y(x)$, то, исследуя изменение полной потенциальной энергии на минимум, можно определить значение $P_{кр}$.

С.П. Тимошенко предложил считать изменение полной потенциальной энергии при переходе в смежное состояние равным нулю, т.е. предложил "не различать" энергию смежного и исходного состояний равновесия в точке ветвления форм равновесия. Из этого предложения немедленно следует формула:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow P = \frac{\int_0^l EJ(x) [y^{II}(x)]^2 dx}{\int_0^l [y^I(x)]^2 dx}$$

Например, для стержня Эйлера (шарнирно опёртого по концам) прогиб может быть задан в форме: функция точного решения (удовлетворяются <u>все</u> граничные условия):

$$y(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \Rightarrow$$

$$P = \frac{\int_0^l EJ(x) [y^{II}(x)]^2 dx}{\int_0^l [y^I(x)]^2 dx} = EJ \frac{\int_0^l \left[\frac{d^2 A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{dx^2}\right]^2 dx}{\int_0^l \left[\frac{dA \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{dx}\right]^2 dx} = EJ \cdot \frac{\pi^2}{l^2}$$

функция, удовлетворяющей условию отсутствия прогибов по концам, – квадратная парабола:

$$y(x) := \alpha \cdot \left[-\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]$$

$$P := \frac{\int_0^l E \cdot J \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 dx} \rightarrow \frac{12 \cdot E \cdot J}{l^2}$$

Сравнивая с точным решением, видим, что решение по Тимошенко даёт завышенное критическое значение силы ($12 > \pi^2$).

Функция прогиба y(x) подбирается из условия удовлетворения *основным* (геометрическим) краевым условиям.

Метод Ритца даёт более точные результаты.

$$y(x) := \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cdot \varphi_k(x)\right),$$

где каждая из функций ряда должна удовлетворяться *основным* краевым условиям, а параметры α_k являются неизвестными постоянными, определяющими предполагаемую форму смежного состояния.

Критическая нагрузка определяется из системы условий минимума нагрузки P по параметрам α_k:

$$\frac{\partial P(\alpha_k)}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

Полученная система уравнений относительно является однородной, что из условия ненулевых значений этих параметров требует равенства нулю определителя системы. Таким образом формируется уравнение устойчивости.

Метод Ритца можно применить и в форме **условия стационарности** изменения полной потенциальной энергии:

$$\frac{\partial(\Delta U)}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, 2, \ldots$$

Формируемая система уравнений является однородной, поэтому имеет тождественно ненулевое решение при условии, что её определитель равен нулю – также формирует уравнение устойчивости.

При любом варианте использования энергетического метода значение критической силы является завышенным. Но оно тем ближе к истинному значению, чем больше параметров α_k использовано для приближения формы равновесия.

Что касается *устойчивости формы равновесия* с критическим значением нагрузки, то в рамках энергетического метода следует пользоваться теоремой Лагранжа и определять, является ли полная потенциальная энергия исследуемой формы равновесия минимальной. Для этого вычисляют вторую производную изменения полной потенциальной энергии и исследуют её знак: если она положительна, то искомый минимум наличествует и форма равновесия устойчива.

1.4.1. Устойчивость стержней сплошного сечения

В рамках энергетического метода запишем изменение потенциальной энергии при переходе в смежное состояние с учётом поперечных сил для шарнирно-опёртого стержня, задав простейшую форму смежного состояния:

$$\gamma = \frac{K_H Q}{GF} = \frac{K_H M'(x)}{GF}$$

$$M(x) = Py(x)$$

$$\Delta U = -\left(\Delta T + \Delta W_M + \Delta W_Q\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^l P\left[y'(x)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\left[Py(x)\right]^2}{EJ} dx + \frac{1}{2}\int_0^l K_H \frac{\left[Py'(x)\right]^2}{GF} dx = 0$$

Q перемещается на величину γdx – это смещение одного сечения относительно другого за счёт сдвига на угол γ

$$\frac{1}{2} Q \cdot \gamma dx = \frac{1}{2} Py'(x) \cdot K_H \frac{Py'(x)}{GF} dx$$

$$y(x) := A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$$

$$\frac{-1}{2}\cdot\int_0^l P\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 dx+\frac{1}{2}\cdot\int_0^l \frac{1}{E\cdot J}\cdot(P\cdot y(x))^2 dx+\frac{1}{2}\cdot\int_0^l K_H\cdot\frac{1}{G\cdot F}\cdot\left(P\cdot\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 dx \left|\begin{matrix}simplify\\factor\end{matrix}\right. \rightarrow -\frac{A^2\cdot P\cdot\left(-F\cdot G\cdot P\cdot l^2+\pi^2\cdot E\cdot F\cdot G\cdot J-\pi^2\cdot E\cdot J\cdot K_H\cdot P\right)}{4\cdot E\cdot F\cdot G\cdot J\cdot l}$$

$$-F\cdot G\cdot P\cdot l^2+\pi^2\cdot E\cdot F\cdot G\cdot J-\pi^2\cdot E\cdot J\cdot K_H\cdot P \left|\begin{matrix}solve\ ,P\\ substitute\ ,\pi^2=\dfrac{l^2\cdot P_e}{E\cdot J}\\ substitute\ ,K_H=\alpha\cdot\dfrac{G\cdot F}{P_e}\end{matrix}\right. \rightarrow \frac{P_e}{\alpha+1}$$

Подсчитаем значения коэффициента α для стержня сплошного сечения:

$$P=\frac{P_Э}{1+\dfrac{K_H P_Э}{GF}}=\frac{P_Э}{1+\alpha}$$

$$\frac{K_H P_Э}{GF}=\frac{1{,}2\cdot\sigma_T}{\dfrac{E}{2(1+\nu)}}=\frac{1{,}2\cdot 250}{\dfrac{210000}{2{,}6}}\approx 0{,}0037$$

Т.е. влияние сдвига на значение критической силы для стержней `сплошного` сечения незначительное!

1.4.2. Устойчивость стержней сквозного сечения

В качестве примера таких стержней можно привести двухветвевые колонны типа "ферма" (с раскосной решёткой) и типа "рама" (с планками).

Конструкция этих стержней отличается тем, что стержни-ветви колонн воспринимают поперечную нагрузку в виде системы часто расположенных сосредоточенных сил, которые уравновешиваются `поперечными усилиями`, значительно превосходящими по величине поперечные усилия от изгиба при переходе в смежное состояние. Поэтому вначале требуется выяснить, как влияют поперечные силы на устойчивость стержня в случае сплошного сечения.

Теперь оценим влияние сдвига в стержнях составного сечения.

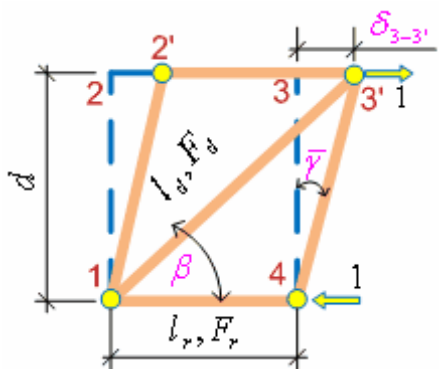
Для этого применим способ, основанный на вычислении сдвига от единичной поперечной силы, поскольку имеет место следующее соотношение:

$$\omega^2=\frac{\bar{m}\int_0^l Y^2(x)dx}{\int_0^l\dfrac{\left(M_A^{(q)}\right)^2}{EJ}dx}=\bar{m}EJ\frac{\int_0^l Y^2(x)dx}{\int_0^l\dfrac{\left(M_A^{(q)}\right)^2}{EJ}dx}$$

Таким образом, поправочный коэффициент, учитывающий деформацию сдвига в сечении, может быть представлен в форме

$$\alpha=\frac{K_H P_e}{GF}=\bar{\gamma}P_e$$

Решётка типа "ферма". Рассмотрим одну панель стержня составного сечения на базе соединения ветвей стержнями.



Сдвиг распорок относительно друг друга можно определить, вычислив перемещение узла 3. Для этого в качестве грузового и направляющего состояний назначим состояние нагружения единичными горизонтальными силами. Заметим, что силы этого направления являются перерезывающими, а не поперечными. Но поскольку в формуле для перемещений от продольных усилий учитываются их произведения, разницой между единичными поперечными и перерезывающими силами можно пренебречь.

$$1\cdot\cos\gamma\approx 1;\quad 1\cdot\sin\bar{\gamma}\approx\bar{\gamma}$$

$$N_{1-4}=1;\ N_{4-3'}=\bar{\gamma};\ N_{1-3'}=\frac{1}{\cos\beta}$$

$$\delta_{3-3'}=\sum\frac{\bar{N}_s^2\cdot l_s}{EF_s}\Rightarrow$$

$$\bar{\gamma}=\frac{1}{d}\left(\frac{\bar{\gamma}^2\cdot d}{EF_c}+\frac{\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)^2\cdot l_d}{EF_d}+\frac{1^2\cdot l_r}{EF_r}\right)=$$

$$=\frac{1}{EF_c}\left(\bar{\gamma}^2+\frac{F_c}{F_d}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta\cdot\sin\beta}+\frac{F_c}{F_r}\cdot\frac{1}{\tan\beta}\right)$$

$$\bar{\gamma}^2<<\frac{F_c}{F_d}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta\cdot\sin\beta}+\frac{F_c}{F_r}\cdot\frac{1}{\tan\beta}\Rightarrow$$

$$\bar{\gamma}=\frac{1}{E}\left(\frac{1}{F_d\cos^2\beta\cdot\sin\beta}+\frac{1}{F_r\tan\beta}\right)$$

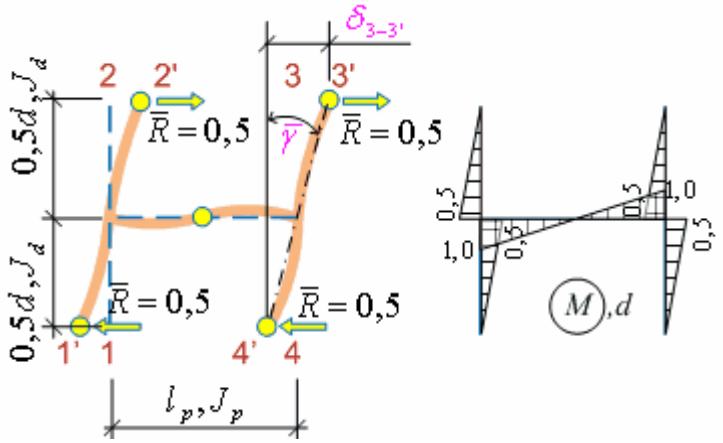
Числовую оценку влияния сдвига на значение критической силы проведём, воспользовавшись тем, что максимальное значение отношения $P_{кр}/F_c$ (F_c – площадь поперечного сечения стержня) не может превышать предела текучести. Так что имеем

$$\alpha:=\frac{P_Э}{F_c}\cdot\frac{F_c}{E}\cdot\left(\frac{1}{F_b\cdot\tan(\beta)}+\frac{1}{F_r\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\beta)^2}\right)$$

$$\alpha\le\sigma_T\left(\frac{F_c}{F_b\cdot\tan(\beta)}+\frac{F_c}{F_r\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\beta)^2}\right)$$

Задавшись материалом и соотношением площадей, можно получить числовую оценку коэффициента. Для стальных стержней в реальном диапазоне соотношений коэффициент может достигать значений 10% и более. При этом более влиятельной оказывается площадь раскосов (в сравнении с площадью распорок).

Решётка типа "рама". Теперь рассмотрим стержень, ветки которого соединены планками.



Поскольку планки имеют значительную изгибную жёсткость, вычисление сдвига внутри одной панели, которая выделяется сечениями стоек с нулевыми значениями момента в смежном состоянии, производится на основе эпюры изгибающих моментов. При этом грузовое и направляющее состояния являются тождественными. Единичная направляющая сила распределяется между стойками сечения.

$$\gamma := \frac{1}{d}\cdot\left[\frac{4}{E\cdot J_d}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}\right)\right]+\frac{2}{E\cdot J_p}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{l_p}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}\right)\right]\right] \left|\begin{array}{l}explicit\\ simplify\end{array}\right. \rightarrow \frac{d\cdot\left(J_p\cdot d+2\cdot J_d\cdot l_p\right)}{24\cdot E\cdot J_d\cdot J_p}$$

С учётом значения критической силы Эйлера для шарнирно-опёртого стержня для значения коэффициента получаем выражение (J – момент инерции всего сечения)

$$\alpha := \left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot E\cdot J\cdot\frac{d\cdot\left(J_p\cdot d+2\cdot J_d\cdot l_p\right)}{24\cdot E\cdot J_d\cdot J_p}\right] \rightarrow \frac{\pi^2\cdot J\cdot d\cdot\left(J_p\cdot d+2\cdot J_d\cdot l_p\right)}{24\cdot J_d\cdot J_p\cdot l^2}\ expand \rightarrow \frac{\pi^2\cdot J\cdot d^2}{24\cdot J_d\cdot l^2}+\frac{\pi^2\cdot J\cdot d\cdot l_p}{12\cdot J_p\cdot l^2}$$

Задаваясь реальными соотношениями размеров панели и моментов инерции, можно получить числовую оценку значения коэффициента. Его значение для металлических стержней достигает 15% и более.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что влияние поперечных сил в стержнях составного сечения на значение критической силы достаточно весомо снижает критическую силу.

Самостоятельная работа

1.5. Устойчивость стержней переменного сечения

См. [2, глава 3]

Самостоятельная работа

1.6. Решение задачи устойчивости на ЭВМ

См. [1, п. 15.5]

ЛЕКЦИЯ 5

РАЗДЕЛ 2.
ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКИХ РАСЧЁТНЫХ СХЕМ

В задачах статики нагрузки рассматриваются как постоянные во времени или меняющимися так медленно, что сооружение остаётся практически неподвижными.

В противоположность этому в задачах динамики рассматриваются нагрузки, изменяющиеся во времени настолько быстро, что в результате их действия конструкция приходит в движение и её элементы приобретают значительные ускорения, которые порождаются соответствующие **силы инерции**.

Эти дополнительные нагрузки (силы инерции) должны быть учтены в расчёте.

Из истории аварий строительных конструкций вследствие динамических являений

Дата	Авария	Причина
1850 г.	Во время дождя и сильного ветра при прохождении по мосту воинского отряда обрушился тросовый мост длиной 120 м на реке Мэн в г. Анжер (Франция)	Резонанс вследствие ударно-подвижной нагрузки
1905 г.	Обрушение "Египетского" подъемного моста через реку Фонтанку (Петроград) во время движения по нему кавалерийского отряда	Резонанс вследствие ударно-подвижной нагрузки
1940 г.	Обрушение 3-х пролетного висячего моста (335,5+854+335 м) у г. Таколы (США)	Резонанс вследствие колебаний, порожденных завихрениями воздуха при большой скорости и силе ветра
1965 г.	Трещины в стенках трубопроводного перехода через реку (у опор, 275+275 м, диаметр 508 мм, давление 50 атм) в Польше. Через год после сдачи в эксплуатацию	Резонанс от действия вихрей (Кармана) при обтекании трубы ветром
70-е годы XX в.	Обрушение крана-перегружателя на складе сыпучих материалов (пролет 76,35 м, консоли 32 и 37 м. После 10 лет эксплуатации оба верхние пояса балки разорвались точно песередине пролета (Польша)	Усталостное разрушение верхнего пояса
1970 г.	Многочисленные трещины в узлах балки автодорожного моста в виде неразрезной 3-з пролетной балки (39,5+68+39,2 м) в Польше. Эксплуатация прекращена.	Большой размах колебаний (300 мм при высоте балки в 2000 мм), возбуждаемых проходящими трамваями (резонанс)

2.1. Методы исследования движения расчётных схем

Движение системы характеризуется изменением во времени перемещений, деформаций и усилий.

Причина движения – нагрузки, у которых значения, направления или место приложения меняются во времени (**динамические нагрузки**), главным признаком которых служит появление ***сил инерции***.

Виды динамических нагрузок

Класс нагрузки	Характеристика во времени
Периодическая	Многократно повторяющаяся через определенные промежутки времени (период). Важнейший вид – гармоническая (по закону sin/cos)
Импульсная	Быстрое развитие и исчезновение (например, взрыв)
Ударная	Резкое изменение скорости ударяемого тела в короткий промежуток времени
Подвижная	Меняющееся местоположение на сооружении
Сейсмическая	Движение почвы при землетрясениях

Реакция сооружения на динамические нагрузки порождает в каждой точке оси расчётной схемы следующие силы:

силы упругости, значения и направления которых определяются гипотезами строительной механики (M, Q, N) о линейно-деформируемом твёрдом теле:

$$\vec{F} = -c\vec{v}$$

здесь c – жёсткость в точке оси (сила, возникающая при смещении точки на 1 единицу длины);

силы инерции, значения и направления которых при поступательном движении определяются 2-м законом Ньютона:

$$\vec{I} = -m\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = -m\vec{v}_{,tt}$$

здесь фигурирует ускорение массы в точке (т.е. точка считается "тяжёлой": её "тянет" к земле с ускорением 9,81 м/сек^2) и линейное перемещение точки;

силы сопротивления, значения и направления которых определяются линейной зависимостью от скорости смещения точки:

$$\vec{R} = -b\frac{d\vec{v}}{dt} = -b\vec{v}_{,t}$$

здесь *b* – коэффициент сопротивления (сила, препятствующая движению со скоростью "единица").

⚠ Вращательным движением точек стержневых систем пренебрегают, так как момент инерции вращения (аналого массы в линейном движении) из относительно малых размеров поперечных сечения порождает малые вращающие моменты!

Поскольку в любой стержневой расчётной схеме имеется бесчисленное число точек, каждая из которых имеет массу, приходится рассматривать дифференциально малый элемент оси *dx* площадью *F*, масса которого определяется его плотностью и объёмом:

$$\rho \cdot dV = \rho(F \cdot dx)$$

Таким образом, учёт сил инерции и сопротивления требует работы с дифференциальными, а не алгебраическими зависимостями от времени и координат.

В связи с этим были сделаны успешные попытки упрощения моделей движения путём сосредоточения массы конструктивных элементов в конечном числе узлов расчётной схемы.

Таким образом, в строительной механике плоских стержневых систем различают две **динамические модели сооружения**:

- Модели с **бесконечно большим** числом динамических степеней свободы (системы с распределённой массой).
- Модели с **конечным** числом динамических степеней свободы (системы с сосредоточенными массами).

Характеристики колебательного процесса

Большинство наблюдаемых в природе и технике динамических явлений являются ***колебательными***: т.е. во времени они характеризуются поочередным возрастанием и убыванием наблюдаемых значений некоторого параметра.

Наиболее важным для инженерных приложений является ***периодический*** колебательный процесс. Его кинематическими характеристиками являются:

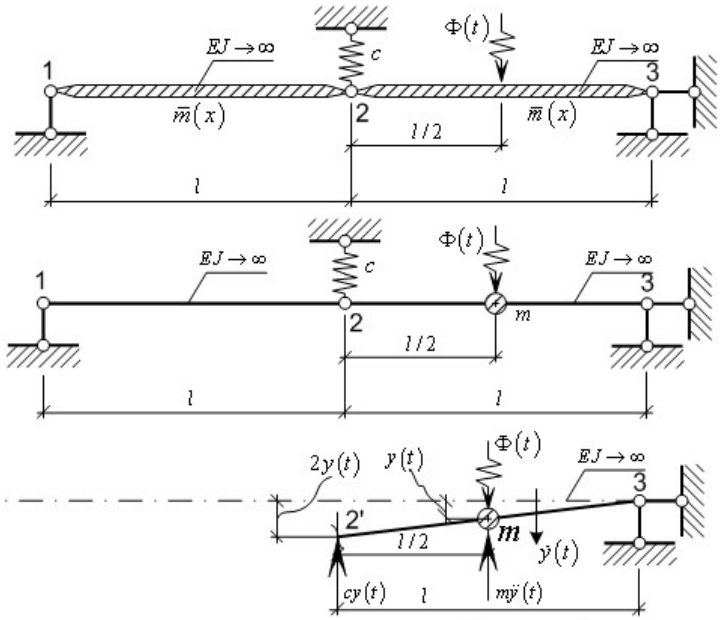
Период колебаний T (частота колебаний ω, техническая частота f)	$y(t) = y(t+T)$ $\omega = 2\pi / T,\ рад/сек;$ $f = 1/T,\ сек^{-1}$
Закон изменения параметра (гармонические колебания)	$A\sin(\omega t + \varphi)$
Амплитуда колебаний	$\max\lvert y(t)\rvert$
Фаза колебаний	φ
Линейность гармонических колебаний	$A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(\omega t + \varphi) = A_3\sin(\omega t + \psi)$

Исследование колебаний осуществляется несколькими методами.

2.1.2. Кинетостатический метод

Метод основан на *принципе Даламбера*, который состоит в том, что расчетная схема в каждый момент времени находится в равновесии под действием заданных динамических нагрузок, вызываемых ими инерционных сил и реакций связей, наложенных на систему.

После формулировки соответствующих уравнений равновесия, применяются методы статики сооружений.

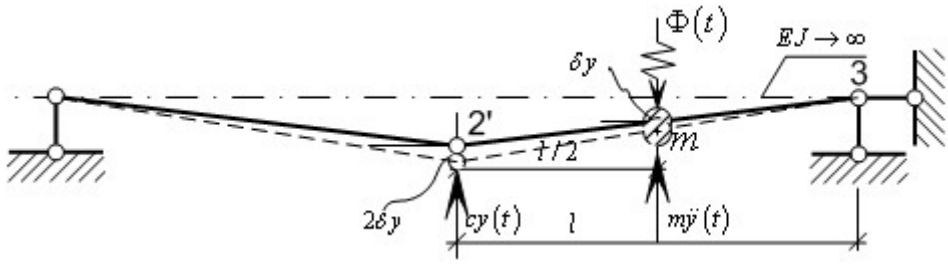


$$\sum M_3 = 0 \;\Rightarrow\; -\left[c\cdot 2y(t)\right]\cdot l - m\ddot{y}(t)\cdot\frac{l}{2} + \Phi(t)\cdot\frac{l}{2} = 0$$

$$l \neq 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{y}(t) + 4cy(t) = \Phi(t)$$

2.1.3. Кинематический метод

Метод на равенстве нулю возможных работ в заданной системе, если она находится в состоянии равновесия (***принцип Лагранжа***)



$$\delta A = -\left[c\cdot 2y(t)\right]\cdot 2\delta y - m\ddot{y}(t)\cdot\delta y + \Phi(t)\cdot\delta y = 0$$

$$\delta y \neq 0 \quad m\ddot{y}(t) + 4cy(t) = \Phi(t)$$

2.1.4. Энергетический метод

Метод основан на использовании энергетических принципов: закона сохранения полной механической энергии, в которую включены слагаемые от инерционных и других сил. В частности, если сопротивления движению нет (или оно не учитывается), то используя закон сохранения полной механической энергии можно записать:

$$U + K = Const \;\Rightarrow\; \Delta U + \Delta K = 0$$

$$U = \frac{1}{2}\left(\sum\int\frac{M^2}{EJ} + \sum\int\mu\frac{Q^2}{GF} + \sum\int\frac{N^2}{EF}\right)$$

U – потенциальная энергия упругого деформирования

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i v_i^2 + \sum\int m(z)v^2(z)\right),\quad v_i = \frac{dy_i}{dt},\quad v(z) = \frac{dy(z)}{dt}$$

Здесь первое слагаемое кинетической энергии K – вклад точечных масс при поступательном перемещении, а второе слагаемое относится к массам, распределенным вдоль оси. Для рассмотренного примера получаем:

$$K=\frac{1}{2}m\dot{y}^2(t);\quad U=-A=-\left\{\frac{1}{2}\left[c\cdot 2y(t)\right]\cdot 2y(t)-\Phi(t)\cdot y(t)\right\}$$

$$\Delta(K+U)=0\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}(K+U)dt=0;\quad dt\neq 0\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}(K+U)=0$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t)=m\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t)$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dU}{dy(t)}\frac{dy(t)}{dt}=\dot{y}(t)\frac{dU}{dy(t)}=\dot{y}(t)\left[4cy(t)-\Phi(t)\right]$$

Так как потенциальная энергия упругого деформирования зависит только от начального и конечного положений, то ее значение определяется зависимостью от прогибов, а не от скоростей или ускорений. Это нужно иметь ввиду, когда выполняется дифференцирование компонент потенциально энергии по времени (см. в формуле выше).

$$\frac{d}{dt}(K+U)=m\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)\left[4cy(t)-\Phi(t)\right]=0$$

$$\dot{y}(t)\neq 0\ \Rightarrow\ m\ddot{y}(t)+4cy(t)=\Phi(t)$$

ЛЕКЦИЯ 6

2.2. Динамические модели расчётных схем с сосредоточенными и распределёнными массами

2.2.1. Модель сооружения с конечных числом динамических степеней свободы

Существуют формулы, которые дают оценку интервала содержания минимальной частоты подобных моделей.

Формулы Бернштейна-Смирнова. Применяются **для оценки первой (низшей) частоты** системы с конечным числом динамических степеней свободы $W_\partial=N$.

Оценка С.А. Бернштейна

$$\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}<\omega_1<\frac{1}{\sqrt{\frac{B_1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2B_2}{B_1^2}-1}\right)}}$$

где

$$B_1=\sum_{i=1}^{N}\delta_{ii}m_i;$$

$$B_2=\sum_{i=1}^{N}\delta_{ii}^2m_i^2+2\sum_{i=1\neq j}^{N}\sum_{j=1\neq i}^{N}\delta_{ij}^2m_im_j=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{ij}\delta_{ij}m_im_j$$

Частота вычисляется как среднее значение

$$\omega_1\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{B_1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2B_2}{B_1^2}-1}\right)}}\right)$$

Следует **обратить внимание** на условия вычисления второго слагаемого: `суммируются внедиагональные элементы` матрицы податливости $[\delta]$, компоненты которой определяются на основе загружения расчётной схемы единичными силами инерции.

Теория утверждает, что **точность вычисления низшей частоты** спектра как середины интервала оценки **вполне достаточная**, т.е. относительная погрешность **не превышает 10-15%**. Чтобы доказать

это, следует обратить внимание на подкоренное выражение "внутреннего" корня, которое должно быть `не меньше нуля`!

$$\frac{2B_2}{B_1^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2B_2}{B_1^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{B_1^2}{2B_2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{B_1^2}{2B_2} = x \leq 1 \wedge \frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} < \omega_1 < \frac{1}{\sqrt{\frac{B_1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}}$$

Тогда приближённое значение частоты определяется выражением

$$\omega_1 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{B_1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2B_2}{B_1^2}-1}\right)}}\right) = \frac{1}{2\sqrt[4]{B_2}}\left(1 + \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}}\right)$$

Функция относительной погрешности определяется формулой

$$\delta_{\omega_1} < \frac{\frac{1}{2}(\max\omega_1 - \min\omega_1)}{\min\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}(\max\omega_1 + \min\omega_1 - 2\min\omega_1)}{\min\omega_1} = \frac{\approx\omega - \min\omega_1}{\min\omega_1} =$$

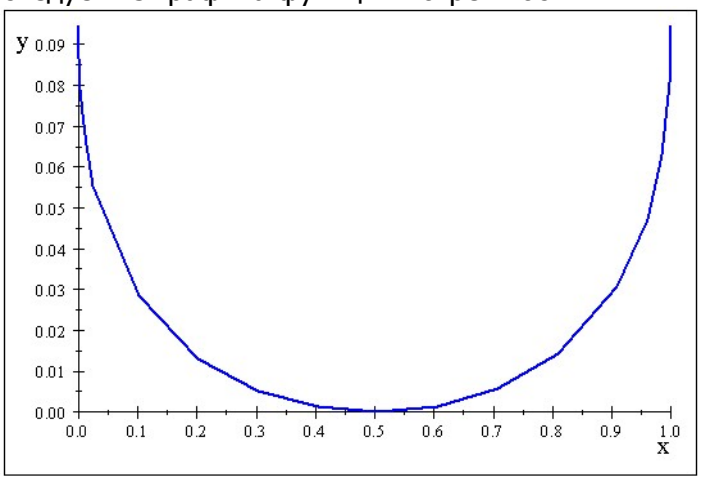
$$= \frac{\approx\omega}{\min\omega_1} - 1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}}\right) - 1$$

Для случай, когда выполняется равенство единице, имеем

$$\delta_{\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}(\max\omega_1 - \min\omega_1)}{\min\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}(\max\omega_1 + \min\omega_1 - 2\min\omega_1)}{\min\omega_1} = \frac{\omega_1 - \min\omega_1}{\min\omega_1} \Rightarrow$$

$$\delta_{\omega_1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt[4]{B_2}} \cdot 2.1892 - \frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}} = 0.0946 = 9{,}46\%$$

Если же x<1, то относительная погрешность меньше этого значения (т.е. всё равно `меньше 10%`), что следует из графика функции погрешности



Аналитическое доказательство основано на разложении функции $(1-x)^{-1}$ в ряд в окрестности точки x.

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \ldots \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}\right) = 1 + \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \ldots \Rightarrow$$

$$\left(1+\sqrt{x}\right)^{-1} = 1 - \sqrt{x} + x - \ldots \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}} \approx 1 + \sqrt[4]{2}\left(1 - \sqrt{x} + x - \ldots\right) \Rightarrow$$

Студентам предлагается выполнить соответствующие выкладки для подтверждения этого вывода.

Оценка А.Ф. Смирнова

$$\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} < \omega_1 < \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

Низшая частота определяется формулой

$$\omega_1 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} + \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\right)$$

С учётом обозначения для x, из формулы Смирнова получаем

$$\frac{B_1^2}{2B_2} = x \Rightarrow \left|\sqrt{\frac{B_1}{B_2}} = \sqrt{\frac{B_1 \cdot B_1 \cdot 2}{B_2 \cdot B_1 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2x}{B_1}} \Rightarrow\right.$$

$$\omega_1 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}} + \sqrt{\frac{2x}{B_1}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}\left(1 + \sqrt[4]{B_2}\sqrt{\frac{2x}{B_1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}\left(1 + \sqrt[4]{\frac{B_2(2x)^2}{B_1^2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}\left(1 + \sqrt[4]{2x}\right) \Rightarrow$$

Это даёт нам возможность записать функцию относительной погрешности в форме

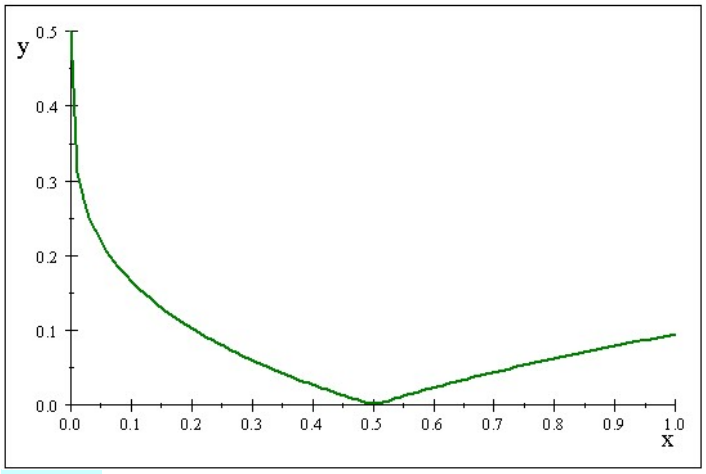
$$\delta_{\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}(\max\omega_1 - \min\omega_1)}{\min\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}(\max\omega_1 + \min\omega_1 - 2\min\omega_1)}{\min\omega_1} = \frac{\omega_1 - \min\omega_1}{\min\omega_1} \Rightarrow$$

$$\delta_{\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}\left(1+\sqrt[4]{2x}\right) - \frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{B_2}}} = \frac{1+\sqrt[4]{2x}-2}{2} = \frac{\sqrt[4]{2x}-1}{2}$$

Чтобы при маленьких значениях x погрешность не могла быть отрицательной, преобразуем выражение к виду

$$\delta_{\omega_1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{2x}-1}{2}\right)^2}$$

График этой функции имеет вид

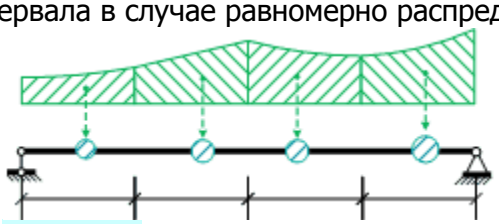


Вывод: погрешность формулы Смирнова возрастает для для маленьких значений x и может достигать 50%, в то время как в формуле Бернштейна относительная погрешность не превышает 10%.

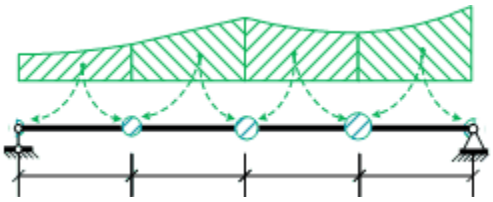
2.2.2. Способы моделирования массы сооружения конечным числом динамических степеней свободы

Способы замены распределённой массы сосредоточенными

Способ А. Деление участка на **равные** интервалы и сосредоточение массы интервала в узле, лежащем **на линии центра тяжести** площади эпюры распределения массы на интервале (это середина интервала в случае равномерно распределённой массы)



Способ Б. Деление участка на **равные** интервалы и сосредоточение массы интервала **в узлах концов интервала** **по закону рычага** (правило определения реакций в элементарной шарнирно опёртой балке от сосредоточенной силы – если интенсивность распределения массы неравномерная) – по половине массы интервала, если масса распределена по интервалу равномерно.



Способ переноса масс

В основе способа лежит идея замены заданной динамической расчётной схемы системой с одной массой. При этом эквивалентная масса не равна сумме составляющих масс, а вычисляется по специальному алгоритму, суть которого состоит в том, что **независимо от положения** приведенной массы низшая частота свободных колебаний должна быть одной и той же

$$\omega_1 = \frac{1}{\delta_{KK} m_K} = \frac{1}{\delta_{SS} m_S} \Rightarrow m_S = \frac{\delta_{KK}}{\delta_{SS}} m_K$$

т.е.перенос m_K в другое место (узел S) требует изменения m_K на коэффициент $\mu_K = \delta_{KK}/\delta_{SS}$.

Если таких масс несколько, то приведенная масса вычисляется по формуле

$$M = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{ii}}{\delta_{SS}} m_i = \frac{1}{\delta_{SS}} \{\delta_{II}\}^T \{m\}$$

где S - узел приведения, а δi - перемещение вдоль i-й динамической степени свободы от единичной силы инерции (в том числе - степени свободы S).

Если масса распределена вдоль оси расчётной схемы то формула может быть обобщена

$$M = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{ii}}{\delta_{SS}} m_i + \frac{1}{\delta_{SS}} \int_0^l \delta_{xx} \overline{m}(x) dx = \frac{1}{\delta_{SS}} \left[\{\delta_{II}\}^T \{m\} + \int_0^l \delta_{xx} \overline{m}(x) dx \right]$$

где δ_{xx} - перемещение узла x от единичной силы инерции. Таким образом,

$$\omega_1 \approx \frac{1}{\sqrt{M \delta_{SS}}} = \frac{1}{\sqrt{\{\delta_{II}\}^T \{m\} + \int_0^l \delta_{xx} \overline{m}(x) dx}}$$

➔ Следует, однако отметить, что формула может давать иногда довольно грубые приближения.

2.2.3. Модель сооружения с бесконечным числом динамическийх степеней свободы

Формулы Рэлея-Граммеля

Идея Рэлея заключается в том, чтобы использовать условие стационарности полной энергии движущейся системы при **задаваемой форме** движения, которая отражает граничные условия при минимальной энергии деформации.

$$K + \Pi = K - A = const =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \overline{m}(x) \dot{y}^2(x,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^l EJ y''^2(x,t) dx;$$

$$\frac{d(K + \Pi)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$для \ \overline{m}(x) = const, \ EJ = const \ и \ y(x,t) = Y(x) \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\dot{y}(x,t) = \omega Y(x) \cdot \cos(\omega t); \quad y''(x,t) = Y''(x) \cdot \sin(\omega t);$$

$$\dot{y}^2(x,t) = \omega^2 Y(x) \cdot \cos^2(\omega t); \quad y''^2(x,t) = Y''^2(x) \cdot \sin^2(\omega t);$$

$$\frac{d\dot{y}^2(x,t)}{dt} = -2\omega^3 Y^2(x)\sin(\omega t)\cos(\omega t);$$

$$\frac{dy''^2(x,t)}{dt} = 2\omega Y''^2(x)\sin(\omega t)\cos(\omega t);$$

$$\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) \neq 0 \Rightarrow -\int_0^l \bar{m}(x)\omega^2 Y^2(x)dx + \int_0^l EJY''^2(x)dx = 0$$

$$\omega^2 = \frac{EJ\int_0^l Y''^2(x)dx}{\bar{m}\int_0^l Y^2(x)dx}.$$

Идея Граммеля заключается в том, чтобы из всех моментов времени выбрать такой, когда **силы инерции максимальны**. И именно в этот момент подсчитать потенциальную и кинетическую энергии при условии их стационарности $(K + \Pi) = 0$.

Максимальная (амплитудная) сила инерции равна

$$dI = -m(x)\ddot{y}(x,t)dx = m(x)\omega^2 Y(x)\sin(\omega t)dx \Rightarrow$$

$$dI_A = m(x)\omega^2 Y(x)dx \Rightarrow$$

$$M_A\left[\omega^2 m(x)Y(x)\right] = \omega^2 M_A^{(q)}\left[q = m(x)Y(x)\right]$$

Здесь M_A – амплитудный изгибающий момент, а $M_A^{(q)}$ – изгибающий момент от нагрузки, уменьшенной в ω^2 раз, вызываемой условной нагрузкой $q(x) = \bar{m}Y(x)$.

$$(K + \Pi) = -\int_0^l \bar{m}(x)\omega^2 Y^2(x)dx + \int_0^l \omega^4 \frac{\left(M_A^{(q)}\right)^2}{EJ}dx = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\bar{m}\int_0^l Y^2(x)dx}{\int_0^l \frac{\left(M_A^{(q)}\right)^2}{EJ}dx} = \bar{m}EJ\frac{\int_0^l Y^2(x)dx}{\int_0^l \frac{\left(M_A^{(q)}\right)^2}{EJ}dx}.$$

Таким образом, при обоих подходах нужно иметь выражение $Y(x)$. Чем ближе форма движения к истинной форме 1-й моды колебаний, тем ближе результаты между собой. Но в целом формула Граммеля оценивается как более точная.

Способ приведения массы

Идея метода основана на равенстве кинетической энергии заданной системы и заменяющей балки.

Решение задачи колебаний в соответствии с методом разделения переменных представляется в форме

$y(x,t) = Y(x)Z(t)$ (распределённая по x масса)

$y_i(t) = Y_i Z(t)$ (сосредоточенная в узле x масса),

где функция времени одна для всех точек системы. Т.е., предполагается, что все массы колеблются с **одной** частотой.

Используем эти формы для представления кинетической энергии исходной системы

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{y}_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)\dot{y}^2(x,t)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} m_i Y_i^2 \dot{Z}^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)Y^2(x)\dot{Z}^2(t)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=N} m_i Y_i^2 + \sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)Y^2(x)dx\right]\dot{Z}^2(t)$$

С другой стороны у заменяющей балки с массой M_X в точке x (её положение произвольное!) кинетическая энергия равна

$$K^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{M}_x \dot{y}_x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{M}_x Y_x^2 \dot{Z}^2(t)$$

Здесь $Y(x)$ - функция прогибов вдоль оси участка, а Y_i - прогиб узла с сосредоточенной массой i.

Например, для однопролётной шарнирно опёртой балки в качестве функции прогибов могут быть использованы функции

$$Y(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$Y(x) = A\left[3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

$$Y(x) = A\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[1 - \frac{x}{l}\right]^2$$

Во 2-й строке приведена кривая прогибов от сосредоточенной силы, приложенной посередине пролёта.

В 3-й строке – кривая прогибов от равномерно распределённой нагрузки.

Приравнивая энергии, получаем формулу для приведенной массы

$$K = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=N} m_i Y_i^2 + \sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)Y^2(x)dx\right]\dot{Z}^2(t) = \frac{1}{2}\mathbf{M}_x\dot{Z}^2(t) \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_x = \frac{1}{Y_x^2}\left[\sum_{i=1}^{i=N} m_i Y_i^2 + \sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)Y^2(x)dx\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} m_i \frac{Y_i^2}{Y_x^2} + \sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)\frac{Y^2(x)}{Y_x^2}dx$$

Таким образом, низшая частота может быть вычислена по формуле

$$\omega_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\mathbf{M}_x\delta_{xx}}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_{xx}\left[\sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\frac{Y_i}{Y_x}\right)^2 + \sum_{j=1}^{j=S}\int_0^l \overline{m}(x)\left(\frac{Y(x)}{Y_x}\right)^2 dx\right]}}$$

Сравнение результатов оценки

Точное решение для минимальной частоты собственных колебаний защемлённой балки с равномерно распределённой массой:

$$\omega^2 = \frac{12{,}36EI}{ml^4};$$

приближенное решение задачи по Рэлею (амплитудная форма прогиба $Y(x) = Ax^2$):

$$\omega^2 = \frac{20EI}{ml^4};$$

приближенное решение задачи по Граммелю (амплитудная форма прогиба $Y(x) = Ax^2$):

$$\omega^2 = \frac{12.46EI}{ml^4}$$

приближённое решение задачи для модели с одной массой (по Смирнову)

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{1}{\bar{m}l} \cdot \frac{EJ}{\left(\frac{1}{2}l \cdot l\right) \cdot \frac{2}{3}l} = \frac{3EJ}{\bar{m}l^4}$$

ЛЕКЦИЯ 7

2.3. Свободные колебания расчётных схем с сосредоточенными массами

2.3.1. Уравнения колебаний системы с конечным числом динамических степеней свободы

Сравнительно простым способом получения уточнённой (в сравнении с приближенными) значением частоты собственных колебаний системы является использование уравнения движения расчётной схемы, масса которой представлена некоторым числом сосредоточенных масс. Такие модели называются моделями к конечным **числом динамических степеней** свободы.

Понятие динамической свободы сосредоточенной массы возникает в связи с тем, что эта идеализированная масса, не имеющая поперечных размеров, при наличии ускорения порождает вектор силы инерции. В глобальной системе координат этот вектор в общем случае имеет две проекции, каждая из которых и соответствует одной степени свободы движения массы – динамической степени свободы.

Уравнения движения плоской расчётной схемы в рамках принципа Даламбера можно рассматривать как уравнения равновесия. А поскольку реальные расчётные схемы строительной механики являются статические неопределимыми, то принципиально возможны два способа формирования уравнений движения:

1) метод сил;
2) метод перемещений.

Метод сил в статике формулируется в виде системы условий отсутствия перемещений во направлению "лишних" связей под внешними воздействиями (статическими!):

$$[\delta]\{X\} + \{\Delta(P, t^o, \Delta_c)\} = \{\emptyset\} \Rightarrow \{y_{cm}\} + \{\Delta_{cm}\} = \{\emptyset\}$$

Здесь задействован принцип независимости воздействий в линейно деформируемых системах, которыми мы и занимаемся в курсе строительной механики.

➔ Если считать, что силы инерции (и силы сопротивления) возникают в дополнительных "лишних" связях, а ко внешним воздействиям добавляются динамические нагрузки, то уравнения метода сил можно применить к состоянию системы и в произвольный момент времени (принцип Даламбера).

Это позволяет сформировать следующую систему уравнений:

$$\{y^{(I)}(t)\} + \{y^{(R)}(t)\} + [\{y_{cm}\} + \{y(t)\}] + [\{\Delta_{cm}\} + \{\Delta(t)\}] = \{\emptyset\}$$

В квадратных скобках записаны суммы статических и динамических составляющих перемещений от внутренних сил и внешних воздействий соответствующего типа. Статические перемещения из этого уравнения можно исключить, так как их сумма равна нулю. Так что движение будет происходить вокруг положения равновесия:

$$\{y^{(I)}(t)\} + \{y^{(R)}(t)\} + \{y(t)\} + \{\Delta(t)\} = \emptyset$$

Для единичных значений сил инерции и сопротивления с учётом принципа независимости действия сил в линейно деформируемых системах получим

$$[\delta^{(I)}]\{I\} + [\delta^{(R)}]\{R\} + \{y(t)\} + \{\Delta(t)\} = \{\emptyset\}.$$

Далее примем во внимание, как именно силы инерции и сопротивления зависят от перемещений:

$$\{I\} = [m]\{\ddot{y}(t)\}; \quad \{I\} = [b]\{\dot{y}(t)\},$$

здесь матрицы [m] и [b] -- диагональные (на главной диагонали массы или коэффициенты сопротивления, а остальные элементы 0). С учётом этих зависимостей получим уравнения движения относительно перемещений {y(t)}:

$$[\delta^{(I)}][m]\{\ddot{y}(t)\} + [\delta^{(R)}][b]\{\dot{y}(t)\} + \{y(t)\} + \{\Delta(t)\} = \{\emptyset\} \quad (1.1)$$

Решение {y(t)} этого уравнения в общем виде можно можно представить в форме суммы общего решения {y(t)} однородного ({?(t)}={0}) и частного решения {y*(t)} неоднородного уравнения

$$\{y(t)\} = \{y_0(t)\} + \{y^*(t)\} \quad (1.2)$$

Решение {y0(t)} с учётом постоянных значений коэффициентов однородной части уравнений (1.1) можно искать на основе подстановки Эйлера:

$$\{y_0(t)\} = \{Y\}\exp(\lambda t),$$

а решение {y*(t)} -- в зависимости от вида {?(t)}: если это функции типа элементарных (cos, sin, ...), то это решение имеет вид этих же функций, но с неопределёнными коэффициентами, которые определяются подстановкой частного решения в неоднородное уравнение.

Метод перемещений в статике основан на принципе независимости воздействий в механике линейно деформируемых систем и имеет форму:

$$\{S_{cm}\} + \{S^U_{cm}\} = \{\emptyset\},$$

которая описывает равновесие узлов с дополнительными связями под действием узловых нагрузок и запрещённых перемещений.

➔ Согласно принципа Даламбера, учёт сил инерции в произвольный момент времени позволяет рассматривать систему как равновесную.

Учтём также наличие сил сопротивления и динамической нагрузки. И пользуясь методом перемещений с дополнительными связями по направлениям возникновения сил инерции запишем условия равновесия узлов с дополнительными связями:

$$\{S^{(I)}(t)\} + \{S^{(R)}(t)\} + [\{S_{cm}\} + \{S(t)\}] + [\{S^U_{cm}\} + \{S^U(t)\}] = \{\emptyset\}$$

В квадратных скобках записаны суммы статических и динамических составляющих упругих сил и внешних воздействий соответствующего типа. Статические компоненты уравнения суммарно дают нулевой вклад, поэтому их можно исключить. Что даёт систему уравнений типа:

$$\{S^{(I)}(t)\} + \{S^{(R)}(t)\} + \{S(t)\} + \{S^U(t)\} = \{\emptyset\}$$

Используя принцип независимости воздействий, раскроем формулы для сил в уравнениях метода перемещений:

$$[m]\{\ddot{y}(t)\} + [b]\{\dot{y}(t)\} + [r]\{y(t)\} + \{S^U(t)\} = \{\emptyset\} \quad (2.1)$$

Поскольку независимо от применяемого метода составления уравнения движения должны быть идентичны (при одной и той же системе гипотез: в данном случае гипотез линейно деформируемого тела), приведём уравнения к сравнимому виду, выделив в уравнениях метода перемещений вектор {y(t)}. Для этого умножим уравнение (2.1) слева на $[r]^{-1}$:

$$[r]^{-1}[m]\{\ddot{y}(t)\} + [r]^{-1}[b]\{\dot{y}(t)\} + \{y(t)\} + [r]^{-1}\{S^U(t)\} = \{\emptyset\}.$$

Сравнивая с уравнением (1.1)

$$[\delta^{(I)}][m]\{\ddot{y}(t)\} + [\delta^{(R)}][b]\{\dot{y}(t)\} + \{y(t)\} + \{\Delta(t)\} = \{\emptyset\}, \quad (1.1)$$

видим, что должны выполняться условия:

$$[r]^{-1}[m] = [\delta^{(I)}][m]; [r]^{-1}[b] = [\delta^{(R)}][b]; \quad [r]^{-1}\{S^U(t)\} = \{\Delta(t)\}. \quad (2.2)$$

Анализ этих условий показывает, что:

1. Матрицы $[r]^{-1}$ и $[\delta^{(I)}]$ ($[\delta^{(R)}]$) обратны друг другу, при этом $[\delta^{(I)}]=[\delta^{(R)}]=[\delta]$, так как это матрицы перемещений от единичных сил одного и того же направления (силы инерции и сопротивления в точке действуют в одном направлении). Этот вывод легко принять, рассмотрев физический смысл матриц жёсткости [r] и податливости [δ] для одномерного случая.

2. Вектор узловых динамических нагрузок $\{S^U(t)\}$ определяется произведением матрицы жёсткости [r] на вектор узловых динамических перемещений {Δ(t)}, т.е. имеет место формула $\{S^U(t)\}=[r]\{$

Δ(t)}. Этот вывод является очевидно верным, принимая во внимание физический смысл матрицы жёсткости.

3. Какой вариант использовать для решения конкретной задачи, должен решать исследователь. Однако опыт показывает, что более популярным является метод силе, так как в методе перемещений при реализации матричной формы всё равно приходится строить эпюры в основной системе метода сил.

2.3.2. Определитель частот свободных колебаний

В отсутствии внешних сил и сил сопротивления (свободное движение) уравнения по методу сил имеют вид

$$[\delta^{(I)}][m]\{\ddot{y}(t)\} + \{y(t)\} = \{\emptyset\}$$

Решение ищем в форме подстановки Эйлера

$$\{y(t)\} = \{Y\}\exp(\lambda t).$$

Подставив это решение в уравнение движения, получим:

$$[\delta^{(I)}][m]\lambda^2\{Y\}\exp(\lambda t) + \{Y\}\exp(\lambda t) = \{\emptyset\}$$

Поскольку в произвольный момент времени exp(?t)?0, то для определения имеем уравнение

$$[\delta^{(I)}][m]\lambda^2\{Y\} + \{Y\} = \{\emptyset\}$$

Чтобы вынести вектор в качестве общего члена, используем операцию умножения на единичную матрицу [E] (напомним, что по определению этом матрица, которая получается умножением квадратной матрицы на себе обратную

$$[E] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

так что

$$[E]\{Y\} = [Y]$$

Теперь вектор перемещений можно вынести за скобки:

$$[[\delta^{(I)}][m]\lambda^2 + [E]]\{Y\}$$

Поскольку вектор {Y} не может состоять полностью из нулевых компонентов, получаем уравнение для определения значений λ (*определитель частот*):

$$\det[[\delta^{(I)}][m]\lambda^2 + [E]] = 0$$

Например, для единственной силы инерции имеем

$$\delta_{11}m_1\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}.$$

2.3.3. Формы собственного движения

Для одной динамической степени мы получили решение:

$$y_1(t) = Y_1\exp\left(\pm i\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}\,t\right)$$

Воспользуемся известными соотношениями Эйлера между экспоненциальной функцией и тригонометрическими функциями:

$$\exp(ix) = \cos x + i\sin x;\quad \exp(-ix) = \cos x - i\sin x \Rightarrow$$

$$y_1(t) = Y_{11}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}\,t + i\sin\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}\,t\right) + Y_{12}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}\,t - i\sin\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}\,t\right)$$

Традиционно коэффициент $[1/(\delta_{11}m_1]^{-0.5}$ обозначают ω_1. Его размерность имеет вид

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{L}{P}\,\frac{P}{\frac{L}{T^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{T^2}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{сек},$$

что соответствует понятию частота, а с учётом того, что этот коэффициент принадлежит тригонометрической функции, – понятию круговая частота свободного движения.

Итак, решение уравнения движения с одной динамической степенью свободы имеет вид

$$y_1(t) = Y_{11}(\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t) + Y_{12}(\cos\omega_1 t - i\sin\omega_1 t)$$

Из этих выражений видно, что решение включает две тригонометрические функции, из которых можно составить общее решение

$$y_1(t) = Y_{11}\cos\omega_1 t + Y_{12}\sin\omega_1 t = Y_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Постоянная φ_1 называется фазой движения, а Y_1 -- его амплитудой. Величина T=((2π)/(ω_1)) называется периодом. А движение, осуществляющееся по приведенному закону, называется **гармоническими колебаниями** (вибрацией).

Поскольку после определения частоты уравнение движения в любой момент времени тождественно удовлетворяется, определить амплитуду в этом движении не представляется возможным.

Полученное уравнение описывает форму свободного колебания системы в одной степенью свободы. Если предполагать, что в системе с несколькими динамическими степенями свободы все массы движутся с одной и той же частотой, то для каждой найденной частоты определяется своя форма собственных колебаний.

Частоты, упорядоченные по возрастанию, образуют *спектр частот*. А им соответствующие формы собственных колебаний – *спектр форм*.

ЛЕКЦИЯ 8

2.4. Вынужденные колебания расчётных схем с сосредоточенными массами

Рассмотрим пример системы с одной степенью свободы при наличии сопротивления и внешнего воздействия.

Уравнение движения будет иметь вид

$$[\delta][m]\{\ddot{Y}_i(t)\} + [\delta][b]\{\dot{Y}_i(t)\} + \{Y_i(t)\} = \{\Delta_i(t)\}$$

Домножив уравнение слева последовательно на матрицы, обратные матрицам податливости и масс, можно получить

$$\{\ddot{Y}_i(t)\} + [m]^{-1}[b]\{\dot{Y}_i(t)\} +^{-1} [m]^{-1}[\delta]\{Y_i(t)\} =$$
$$= [m]^{-1}[\delta]^{-1}\{\Delta_i(t)\}$$

Для одной степени свободы имеем

$$\ddot{Y}_1(t) + \frac{b_1}{m_1}\dot{Y}_1(t) + \frac{1}{\delta_{11}m_1}Y_1(t) = \frac{1}{\delta_{11}m_1}\Delta_1(t)$$

Учитывая выражение для частоты свободных колебаний системы с одной степенью свободы, получим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\delta_{11}m_1}$$

В случае вибрационного нагружения уравнение принимает вид

$$\ddot{Y}_1(t) + \frac{b_1}{m_1}\dot{Y}_1(t) + \omega_1^2 Y_1(t) = \omega_1^2\Delta_1^A\sin\theta t$$

Использование принципа наложения позволяет утверждать, что

$$\Delta_1^A = \delta_{11}P_1^A$$

Т.е. кинематическое воздействие может быть заменено на эквивалентной силовое, для чего нужно вычислить перемещение от единичного значения предполагаемой нагрузки.

Решение ищем в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений

$$Y_1(t) = Y_1^0(t) + Y_1^*(t)$$
$$Y_1^0(t) = A\exp(\lambda t);\ Y_1^*(t) = B\sin(\theta t + C)$$
$$Y_1(t) = A\exp(\lambda t) + B\sin(\theta t + C)$$

2.4.1. Понятие о неустановившихся вынужденных колебаниях

Решение в полученной форме состоит из двух частей: первая зависит от частоты собственных колебаний, а вторая – от частоты внешнего воздействия.

Во времени первая составляющая достаточно быстро перестаёт быть значимой. В связи с этим полное решение называют решением задачи о *неустановившихся* вынужденных колебаниях. А решение с учётом только слагаемого, определяемого частотой внешнего воздействия – установившимися вынужденными колебаниями.

Заметим также, что большую роль в «угасании» компоненты общего решения, зависящего от частоты собственных колебаний, играет внутреннее сопротивление материала.

2.4.2. Решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях

Итак, в случае установившихся вынужденных колебаний в системе с одной динамической степенью свободы, решение имеет вид.

$Y_1(t) = B\cdot\sin(\theta t + C)$.

Поскольку частоты внешнего воздействия задана, требуется определить постоянные B и C, значения которых зависят от начальных условия колебаний.

2.4.3. Понятие о коэффициенте динамического усиления действия нагрузки

Наблюдаемое на практике явление увеличения характеристик напряжённо-деформированного состояния расчётной схемы в случае приближения значения частоты внешнего воздействия к одной из частот собственных колебаний может получить объяснение, если сравнить, например, амплитуду установившихся вынужденных колебаний при изгибе Y_*^A и статический прогиб Δ от статического приложения той же нагрузки.

Результат представляется формулой

$$\mu = Y_*^A/\Delta$$

Это отношение называется коэффициентом динамического усиления или амплитудно-частотной характеристикой.

Рассмотрим его вычисление для системы с одной динамической степенью свободы, когда система уравнений для определения амплитуд установившихся вынужденных колебаний представлена одним уравнением:

$$(-\theta^2 m_1\delta_{11} + 1)Y_{*,1}^A = \Delta_1.$$

Напомним, что частота свободных колебаний системы с одной динамической степенью свободы определена формулой

$$\omega^2 = \frac{1}{m_1\delta_{11}}.$$

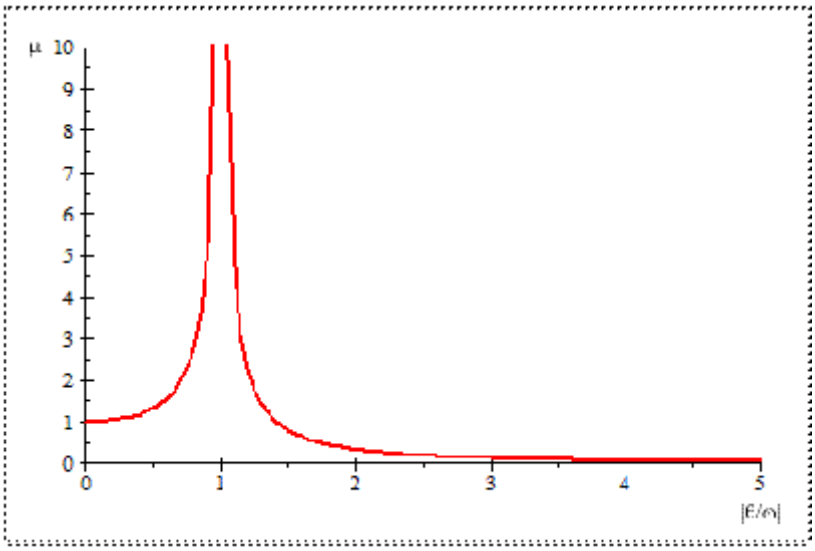
Так что искомое отношение принимает вид

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}.$$

Чтобы не терять физического смысла коэффициента динамического усиления, преобразуем формула так, чтобы исключить отрицательные значения этого отношения:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2}}.$$

График коэффициента динамического усиления представлен на рисунке ниже.



Из графика видно, что исследуемое отношение действительно даёт значительное увеличение амплитуды вынужденных колебаний в случае близких значений частот внешней и собственной.

2.5. Учёт влияния сопротивления на характеристики колебательного процесса

Реальные конструкции состоят из материалов, которые характеризуются внутренним сопротивлением при их деформировании, что выражается в рассеянии части работы внешних сил в виде тепла. Именно такое сопротивление, которое принимается пропорциональным скорости движения, не позволяет коэффициенту динамического усиления достигать сверхбольших значений.

2.5.1. Характеристики сопротивления строительных материалов и конструкций

В литературе имеются экспериментальные данные, представленные таблицей ниже

Конструкция	ψ_{cp}	$\psi = 4\pi\alpha$	**Материал**	$\gamma_0 = 2\alpha$
Ст.мрст	$0,17$	$0,02 \div 0,30$	Бетон и ж/б	$0,10$
Ж/б мост	$0,63$	$0,63 \div 0,63$	Кирп.кладка	$0,08$
Ж/б балка	$0,56$	$0,35 \div 0,78$	Дерево	$0,05$
Ж/б рама	$0,25$	$0,16 \div 0,33$	Прокат ст.	$0,025$
Ж/б покрытие	$0,57$	$0,39 \div 0,78$	$\alpha = \frac{\beta}{\omega_1}$	$\beta = \frac{b_1}{2m_1}$

Здесь использованы обозначения:

Ψcp – коэффициент рассеяния энергии за период колебаний;

β – коэффициент удельного сопротивления;

γ_0 – коэффициент неупругого сопротивления.

Располагая частотой свободных колебаний и данными этой таблицы можно определить параметр α, а затем и коэффициент удельного сопротивления β.

Заметим, что наличие узлов соединения элементов конструкции изменяет характеристики сопротивления в меньшую сторону.

Свободные колебания с сопротивлением

Уравнение свободных колебаний при наличии сопротивления

$$\ddot{Y}_1(t) + 2\beta\dot{Y}_1(t) + \omega_1^2 Y_1(t) = 0$$

Здесь использовано обозначение

$$2\beta = \frac{b_1}{m_1}$$

– коэффициент удельного сопротивления β.

Подставим решение в форме Эйлера

$$Y_1^0(t) = A\exp(\lambda t)$$

Выполняя дифференцирование и приводя подобные, получим

$$A\exp(\lambda t)(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_1^2) = 0$$

Для определения коэффициента λ имеем квадратное уравнение

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_1^2) = 0$$

решение которого имеет вид

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_1^2} =$$

$$= \omega_1\left[-\frac{\beta}{\omega_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2 - 1}\,\right]$$

➔ Здесь ω_1 – частота свободных колебаний без сопротивления!

1. В случае отсутствия сопротивления

$$\beta = 0 \Rightarrow \lambda = i\omega_1 \Rightarrow Y_1^0(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

2. Если коэффициент удельного сопротивления численно равен частоте

$$\beta = \omega_1 \Rightarrow \lambda = -\omega_1 \Rightarrow Y_1^0(t) = A\exp(-\omega_1 t)$$

Начальное отклонение уменьшается по закону экспоненты, т.е. отклонённая от положения равновесия система просто возвращается в своё первоначальное положение (правда, длится это асимптотически долго); никакого колебательного движения нет.

3. Если коэффициент удельного сопротивления больше частоты

$$\beta > \omega_1 \Rightarrow \lambda = -\omega_1\left[\frac{\beta}{\omega_1} \mp \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2 - 1}\,\right] \Rightarrow$$

$$Y_1^0(t) = A\exp(-\beta t)\left\{\begin{array}{l} C_1\exp\left[-\omega_1\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2 - 1}\,t\right] + \\ +C_2\exp\left[+\omega_1\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2 - 1}\,t\right] \end{array}\right\}$$

В этом случае используем связь экспоненциальной функции и гиперболических функций

$$\exp(\pm x) = \cosh x \pm \sinh x$$

И, с точностью до обозначения неопределённых постоянных, получим

$$Y_1^0(t) = A\exp(-\beta t)\left\{\begin{array}{l} C_1\sinh\left[\omega_1\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2 - 1}\,t\right] + \\ +C_2\cosh\left[\omega_1\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2 - 1}\,t\right] \end{array}\right\}$$

Такая форма решения указывает на непереодичность процесса. Причём, процесс также затухает с самого начала движения из состояния отклонённого от положения равновесия.

4. Если коэффициент удельного сопротивления меньше частоты свободных колебаний

$$\beta < \omega_1 \Rightarrow \lambda = -\omega_1\left[\frac{\beta}{\omega_1} \mp i\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2}\right] \Rightarrow$$

$$Y_1^0(t) = A\exp(-\beta t)\left\{\begin{array}{l} C_1\exp\left[i\omega_1\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2}\,t\right]+ \\ +C_2\exp\left[i\omega_1\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2}\,t\right] \end{array}\right\}$$

В этом случае используем формулы Эйлера связи экспоненциальной и тригонометрических функций

$$\exp(\pm ix) = \cos x \pm i\sin x$$

Это позволяет с точностью до обозначения постоянных записать решение в виде

$$Y_1^0(t) = A\exp(-\beta t)\sin\left[\omega_1\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2}\,t+\varphi\right]$$

В этом случае наблюдается периодический процесс, который называется гармоническими колебаниями.

Для удобства анализа придадим решению следующий вид

$$Y_1^0(t) = A\exp\left[-\omega_1\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)t\right]\sin\left[\omega_1\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2}\,t+\varphi\right]$$

а затем обозначим

$$\alpha = \frac{\beta}{\omega_1},\ \Omega_1 = \omega_1\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_1}\right)^2} = \omega_1\sqrt{1-\alpha^2}$$

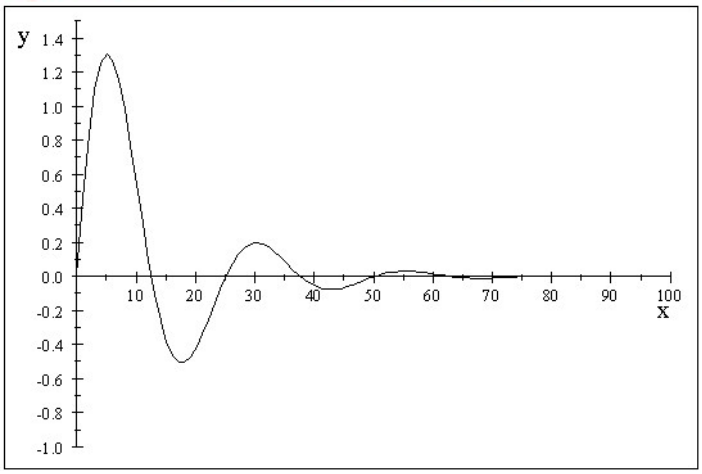
Тогда решение можно записать в виде

$$Y_1^0(t) = A\exp(-\alpha\omega_1 t)\sin(\Omega_1 t+\varphi)$$

где прописная буква "омега" является круговой частотой собственных колебаний с учётом сопротивления, а множитель при функции *sin()* – функцией амплитудных перемещений, т.е. значение амплитуды колебаний во времени изменяется.

Приведём график функции подобного типа

$$Y_1^0(t) = 2\exp(-0.175t)\sin(0.25t)$$



Период свободных колебаний с сопротивлением вычисляется по формуле.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_1}$$

➔ Заметьте, что период (как и частота) свободных колебаний при наличии сопротивления во времени не изменяется.

Чтобы оценить степень влияния сопротивления, рассмотрим, как уменьшается амплитуда колебаний за один период. Для этого рассмотрим отношение амплитуд в моменты времени, разделённые

отрезком времени, равным периоду колебаний. Это отношение называется `декрементом затухания` колебаний d.

$$d = \frac{Y_1^{\text{o}}(t)}{Y_1^{\text{o}}(t+T)} = \frac{A\exp(-\alpha\omega_1 t)\sin(\Omega_1 t+\varphi)}{A\exp[-\alpha\omega_1(t+T)]\sin[\Omega_1(t+T)+\varphi]} =$$

$$= \frac{A\exp(-\alpha\omega_1 t)\sin(\Omega_1 t+\varphi)}{A\exp[-\alpha\omega_1(t+T)]\sin[\Omega_1(t+T)+\varphi]} = \frac{\exp(-\alpha\omega_1 t)}{\exp[-\alpha\omega_1(t+T)]} =$$

$$= \exp\{-\alpha\omega_1 t - [-\alpha\omega_1(t+T)]\} =$$

$$= \exp(\alpha\omega_1 T) = \exp\left(2\pi\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\ln d}\right)^2}}$$

Натуральный логарифм от декремента называется `логарифмическим декрементом затухания`

$$d_{\ln} = \ln d = \ln\left(\exp\left(2\pi\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right) = 2\pi\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d_{\ln}}\right)^2}}$$

Удвоенный логарифмический декремент называется `коэффициентом рассеяния энергии за период`

$$\psi = 2d_{\ln} = 4\pi\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi}{\psi}\right)^2}}$$

Коэффициент рассеяния энергии за период в масштабе 2π называется `коэффициентом неупругого сопротивления`

$$\gamma_0 = \frac{\psi}{2\pi} = 2\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\gamma_0}\right)^2}}$$

➔ Важно помнить, что α – это отношение коэффициента удельного сопротивления $\beta = b_1/2m_1$ к частоте свободных колебаний без сопротивления ω_1.

Вынужденные колебания с сопротивлением

Уравнение колебаний

$$\ddot{Y}_1(t) + \frac{b_1}{m_1}\dot{Y}_1(t) + \omega_1^2 Y_1(t) = \omega_1^2\Delta_1^A\sin\theta t$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде правой части

$$Y_1^*(t) = A\sin(\theta t + B)$$

Подставим это выражение в уравнение

$$-\theta^2 A\sin(\theta t+B) + 2\beta\theta A\cos(\theta t+B) + \omega_1^2 A\sin(\theta t+B) = \omega_1^2\Delta_1^A\sin\theta t$$

$$-\theta^2 A\sin(\theta t+B) + 2\beta\theta A\cos(\theta t+B) + \omega_1^2 A\sin(\theta t+B) =$$

$$= A\omega_1^2\cos t\theta\sin B - A\theta^2\sin t\theta\cos B - A\theta^2\cos t\theta\sin B +$$

$$+A\omega_1^2\sin t\theta\cos B + 2A\theta\beta\cos t\theta\cos B - 2A\theta\beta\sin t\theta\sin B =$$

$$= -A\left(\boxed{\begin{array}{c}\theta^2\cos t\theta\sin B+\theta^2\sin t\theta\cos B-\omega_1^2\cos t\theta\sin B-\\ -\omega_1^2\sin t\theta\cos B-2\theta\beta\cos t\theta\cos B+2\theta\beta\sin t\theta\sin B\end{array}}\right)=$$

$$= -A\left[\boxed{\begin{array}{c}\cos t\theta(\theta^2\sin B-\omega_1^2\sin B-2\theta\beta\cos B)+\\ +\sin t\theta(\theta^2\cos B-\omega_1^2\cos B+2\theta\beta\sin B)\end{array}}\right]\Rightarrow$$

Учтём линейную независимость тригонометрических функций:

$$\theta^2\sin B-\omega_1^2\sin B-2\theta\beta\cos B=0$$

$$\theta^2\cos B-\omega_1^2\cos B+2\theta\beta\sin B=-\frac{\omega_1^2\Delta_1^A}{A}$$

$$(\tau^2-1)\sin B-2\tau\alpha\cos B=0$$

$$(\tau^2-1)\cos B+2\tau\alpha\sin B=-\frac{\Delta_1^A}{A}$$

$$\tau=\frac{\theta}{\omega_1},\ \alpha=\frac{\beta}{\omega_1}$$

Решение этой системы уравнений относительно функций от B имеет вид

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin B\\ \cos B\end{array}}=\boxed{\begin{array}{c}-\frac{2}{A}\alpha\tau\frac{\Delta_1^A-\tau^2\Delta_1^A}{(\tau^2-1)(4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1)}\\ -\frac{1}{A}\frac{\Delta_1^A-\tau^2\Delta_1^A}{4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1}\end{array}}$$

Воспользуемся свойствами тригонометрических функций от B и определим A и B

$$\sin^2B+\cos^2B=1=\left(-\frac{2}{A}\alpha\tau\frac{\Delta_1^A-\tau^2\Delta_1^A}{(\tau^2-1)(4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1)}\right)^2+$$

$$+\left(-\frac{1}{A}\frac{\Delta_1^A-\tau^2\Delta_1^A}{4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1}\right)^2=\frac{1}{A^2}\frac{\Delta_1^{2A}}{4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1}\Rightarrow$$

$$A=\frac{\Delta_1^A}{\sqrt{4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1}}=\frac{\Delta_1^A}{\sqrt{(\tau^2-1)^2+(2\alpha\tau)^2}};$$

$$\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B=\frac{-\frac{2}{A}\alpha\tau\frac{\Delta_1^A-\tau^2\Delta_1^A}{(\tau^2-1)(4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1)}}{-\frac{1}{A}\frac{\Delta_1^A-\tau^2\Delta_1^A}{4\alpha^2\tau^2+\tau^4-2\tau^2+1}}=2\alpha\frac{\tau}{\tau^2-1}$$

$$B=\arctan\frac{2\alpha\tau}{\tau^2-1}$$

Итак, **частное решение** неоднородного уравнения

$$Y_1^*(t)=A\sin(\theta t+B)=Y_1^{*A}\sin(\theta t+B)=$$

$$\frac{\Delta_1^A}{\sqrt{(\tau^2-1)^2+(2\alpha\tau)^2}}\sin\left(\theta t+\arctan\frac{2\alpha\tau}{\tau^2-1}\right)$$

$$Y_1^{*A}=-\frac{\Delta_1^A}{(\tau^2-1)^2+(2\alpha\tau)^2}$$

$$\sin\zeta=2\alpha\tau,\ \cos\zeta=\tau^2-1\Rightarrow\tan\zeta=\frac{2\alpha\tau}{\tau^2-1}$$

$$\zeta=\arctan\frac{2\alpha\tau}{\tau^2-1}$$

Рассмотрим смысл выражения для Y_1^{*A}. Это значение амплитуды установившихся вынужденных колебаний, выраженное через прогиб от статического приложения амплитудной нагрузки. Их отношение определяет `коэффициент динамического усиления` μ, который вычисляется по формуле

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(\tau^2-1\right)^2+(2\alpha\tau)^2}},\ \tau = \frac{\theta}{\omega_1},$$

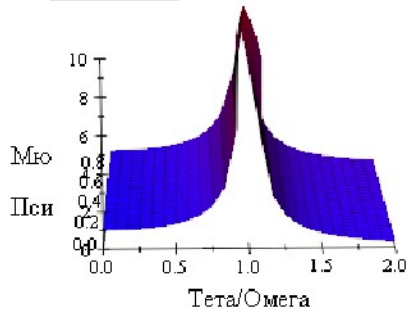
$$\alpha = \frac{\beta}{\omega_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\ln d}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d_{\ln}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi}{\psi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{r_0}\right)^2}}$$

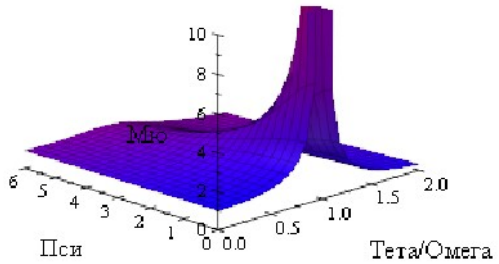
Исследуем поведение коэффициента динамического усиления

$$\mu(\tau,\psi) = \frac{1}{\sqrt{\left(\tau^2-1\right)^2+\left(\frac{2\tau}{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi}{\psi}\right)^2}}\right)^2}}$$

При реальных значениях характеристик строительных конструкций и материалов



Поведение коэффициента динамического усиления в теоретическом диапазоне значений коэффициента сопротивления



Следует обратить внимание на то, что общее выражение перемещения с учётом сопротивления и внешнего гармонического воздействия имеет вид

$$Y(t) = Y_1^0(t) + Y_1^*(t) =$$

$$= A\exp(-\beta t)\sin(\Omega_1 t + \varphi) +$$

$$+\frac{\Delta_1^A}{\sqrt{\left(\tau^2-1\right)^2+(2\alpha\tau)^2}}\sin(\theta t + \zeta),$$

$$\tau = \frac{\theta}{\omega_1}, \alpha = \frac{\beta}{\omega_1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\ln d}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d_{\ln}}\right)^2}} =$$

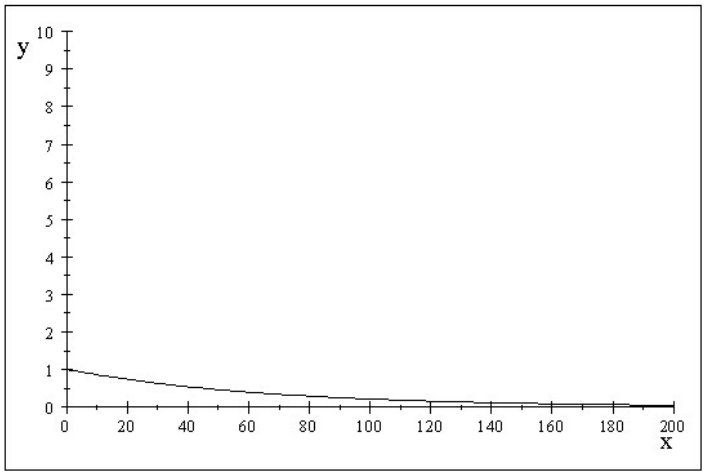
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi}{\psi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{r_0}\right)^2}}$$

$$\zeta = \arctan\frac{2\tau\xi}{\tau^2-1}$$

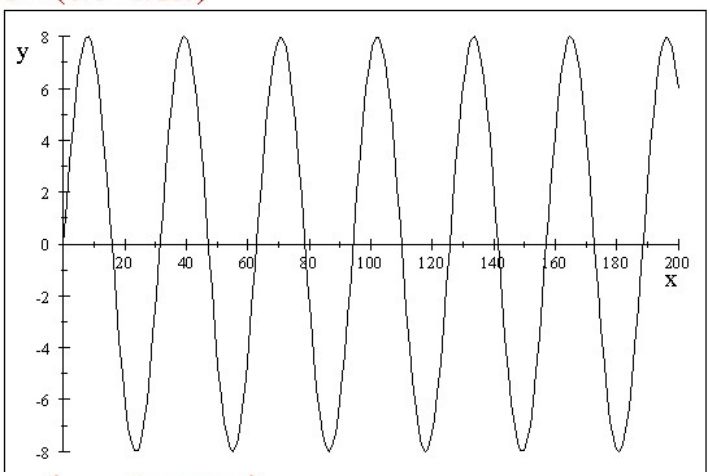
Здесь часть, связанная характеристиками свободного движения с сопротивлением существует очень недолго и называется переходным периодом, который сменяется **установившимися вынужденными колебаниями** с частотой внешнего воздействия.

Например,

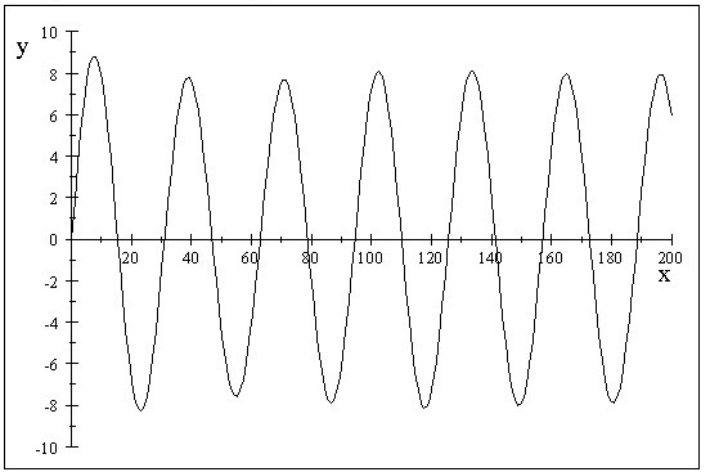
$$\exp\left(-0.25\sqrt{\frac{\left(\frac{0.78}{4\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{0.78}{4\pi}\right)^2}}\,t\right)$$



$8\sin(0.8 \cdot 0.25t)$



$\exp\left(-0.25\sqrt{\frac{\left(\frac{0.78}{4\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{0.78}{4\pi}\right)^2}}\,t\right)\sin(0.25t) + 8\sin(0.8 \cdot 0.25t)$



Самостоятельная работа

2.6. Колебания стержневых систем с распределённой массой

См. [2, пп. 39-40]

Самостоятельная работа

2.7. Решение задачи вынужденных колебаний на ЭВМ

См. [1, п. 15.6]

Библиографический список

1. Теличко, Г.Н. Основы строительной механики плоских стержневых систем : учебник для вузов и сузов / Г. Н. Теличко .— 3-е изд., стер. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2010 .— 440 с.

2. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений / Учебник для вузов, М.: Стройиздат, 1980. - 616 с.